

Treball de Fi de Grau

GRAU EN ENGINYERIA EN TECNOLOGIES INDUSTRIALS

CONTROL NO LINEAL D'UN DISPOSITIU TWIN ROTOR

MEMÒRIA

Autor: Joel Barrero i Castro
Director: Ramon Costa i Castelló
Convocatòria: Juliol 2019



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resum

En aquest projecte es presenta l'aplicació d'una tècnica de control anomenada *Control per modes lliscants* a un equip de laboratori amb una dinàmica semblant a la d'un helicòpter anomenat *Twin Rotor MIMO System* creat per Feedback Instruments Ltd. A diferència d'un helicòpter en el qual els angles d'atac de les pales influeix en la dinàmica d'aquest, aquest equip es controla regulant la velocitat de les pales amb un angle d'atac fixe. Es regula la velocitat de les pales variant la tensió d'entrada al motor DC acoblat a les dos hèlix respectivament. El sistema resultant és de varies entrades i varies sortides (MIMO), altament no lineal i amb forts acoblaments existents.

El projecte es pot dividir en tres fases: la primera fase es tracta de trobar el model matemàtic que dinàmic que governa la dinàmica del TRMS, en aquest cas mitjançant la formulació d'Euler-Lagrange. La segona fase es tracta d'implementar un model de simulació en l'entorn de MATLAB-Simulink que representi la dinàmica de la planta amb les seves entrades i sortides respectivament. Són necessaris experiments per calibrar varis paràmetres del model. Finalment, la tercera part es tracta de dissenyar un controlador mitjançant la tècnica de modes lliscants pel posicionament del TRMS primerament validada en el model de simulació i seguidament experimentalment.

Índex

1	Introducció. Objectius i abast del projecte	8
2	Descripció de la planta	11
3	Model matemàtic i equacions del moviment del TRMS	13
3.1	Obtenció del Lagrangiana del sistema	13
3.1.1	Conjunt de variables generalitzades	14
3.1.2	Càlcul del Lagrangiana	15
3.2	Forces generalitzades	17
3.3	Equacions del moviment	19
3.4	Model simplificat	20
3.5	Paràmetres físics del TRMS	22
4	Modelat i control dels conjunts motor-hèlix	23
4.1	Càlcul de les característiques estàtiques dels rotors	23
4.2	Modelat dels conjunts motor-hèlix	25
4.3	Control dels conjunts rotor-hèlix i filtratge del soroll	28
5	Ajust dels paràmetres del model reduït	34
5.1	Ajust dels paràmetres associats als parells de fricció	34
5.1.1	Determinació del coeficient de fricció q_v	35
5.1.2	Determinació del coeficient de fricció q_h	37
5.2	Característiques estàtiques Velocitat-Força de propulsió dels grups motor-hèlix	39
6	Simulador del TRMS	44
7	Sistema de control del Twin Rotor	47

7.1	Control per modes lliscants	47
7.1.1	Superfícies Lliscants	48
7.1.2	Condició de Lliscament	49
7.1.3	Control equivalent	50
7.1.4	Senyal de control per sistemes amb incertesa	51
7.2	Control basat en modes lliscants aplicat al TRMS	52
7.2.1	Superfície de lliscament	52
7.2.2	Llei de control	54
7.2.3	Anàlisi d'estabilitat mitjançant el criteri de Lyapunov	55
7.3	Efecte de commutació o efecte <i>chattering</i>	57
7.4	Estimació de \dot{q}	59
8	Resultats experimentals i simulació	61
9	Pressupost	66
9.1	Cotos de software i equip de laboratori	66
9.2	Costos de desenvolupament del projecte	66
10	Impacte ambiental	68

Llista de figures

1	<i>Twin Rotor MIMO System</i> [14]	11
2	Subdivisions del TRMS i eixos de referència [14]	15
3	Parells i forces aerodinàmiques que actuen al TRMS [14]	17
4	Corba Velocitat-Tensió motor de cua	24
5	Corba Velocitat-Tensió motor principal	24
6	Resposta del motor principal amb el bloc linealitzador	26
7	Resposta del motor de cua amb el bloc linealitzador	26
8	resposta motor principal simulada i real	27
9	resposta motor de cua simulada i real	27
10	Diagrama de Bode del filtre FIR implementat	31
11	Resposta tailrotor amb el controlador $PI(z)$ i filtre FIR a la cadena de realimentació	32
12	Resposta mainrotor amb el controlador $PI(z)$ i filtre FIR a la cadena de realimentació	32
13	Resposta simulada davant el coeficient $B_{q,11} = 0.002$ i resposta experimental	36
14	Resposta simulada davant el coeficient $B_{q,11} = 0.005$ i resposta experimental	36
15	Resposta simulada i real amb posició inicial $q_0 = 2.37rad$	38
16	Resposta simulada i real amb posició inicial $q_0 = 0.81rad$	38
17	Resposta simulada i real amb posició inicial $q_0 = -0.435rad$	39
18	Corba característica Velocitat-Força motor principal	42
19	Corba característica Velocitat-Força motor de cua	43
20	Simulador del TRMS	44
21	Llibreria del TRMS	46
22	Efecte chattering. Font: Slotline, et al 1991 [15]	57

23	$\tanh(x)$	58
24	$\tanh(10x)$	58
25	derivador robust [18]	60
26	Resposta enfront a entrada $q_{des} = (0.4, 0.7)$ rad	62
27	Acció de control dels motors enfront a entrada $q_{des} = (0.4, 0.7)$ rad .	62
28	Superfícies lliscants enfront a entrada $q_{des} = (0.4, 0.7)$ rad	62
29	Resposta enfront a entrada $q_{des} = (0.2, 0.6)$ rad	63
30	Acció de control dels motors enfront a entrada $q_{des} = (0.2, 0.6)$ rad .	63
31	Superfícies lliscants enfront a entrada $q_{des} = (0.2, 0.6)$ rad	63
32	Resposta enfront a entrada $q_{des} = (-0.25, -0.8)$ rad	64
33	Acció de control dels motors enfront a entrada $q_{des} = (-0.25, -0.8)$ rad	64
34	Superfícies lliscants enfront a entrada $q_{des} = (-0.25, -0.8)$ rad . . .	64
35	Resposta enfront a entrada variable $q_{des1} = (-0.35, 0.4)$ rad i $q_{des2} = (0.1, 1)$ rad	65
36	Acció de control dels motors enfront a entrada variable $q_{des1} =$ $(-0.35, 0.4)$ rad i $q_{des2} = (0.1, 1)$ rad	65
37	Superfícies lliscants enfront a entrada variable $q_{des1} = (-0.35, 0.4)$ rad i $q_{des2} = (0.1, 1)$ rad	65

Llista de taules

1	Valors dels paràmetres de les equacions del moviment del model reduït	21
2	Paràmetres del TRMS	22
3	Taula de valors dels paràmetres τ i K	27
4	Taula de valors dels paràmetres de les funcions de transferència discretes	28
5	Coeficients dels controladors $PI(z)$	31
6	Coeficients del filtre FIR	32
7	Valors de les constants k_m i k_t	42
8	Pressupost d'adquisició de software i equip	66
9	Pressupost d'adquisició de software i equip	67

1 Introducció. Objectius i abast del projecte

En aquest projecte es presenta l'implementació d'un sistema de control basat en els modes lliscants a una maqueta de laboratori que s'assimila a la dinàmica d'un helicòpter conegut com a *Twin Rotor MIMO System* creat per Feedback Instruments Ltd. Aquest equip es compon per un sistema mecànic i un elèctric, formant doncs un sistema multivariable subactuat amb una dinàmica altament no lineal i acoblada.

Existeixen diverses diferències respecte la dinàmica d'un helicòpter i la del TRMS. El TRMS està fix a una referència pel qual no ha de vèncer el seu pes per aixecar-se, només existeixen dos graus de llibertat corresponents als girs de capcineig i de guinyada. Els helicòpters quan es troben en posició horitzontal l'hèlix de cua i la principal no es troben aliniades en un heix horitzontal, sino que l'hèlix de cua es troba lleugerament desplaçada verticalment. Una altra diferència notable és que amb el TRMS els angles d'atac de les pales són fixes i el que es controla són les velocitats de les hèlix per dur a terme el moviment, mentres que a l'helicòpter el control de posició i orientació s'efectua mitjançant canvis apropiats dels angles d'atac de les pales a través els actuadors cíclic i coletiu [1]. Tots aquets fets juntament amb la no linealitat intrínseca ,els acoblaments de la planta i que les forces i parells que s'apliquen per causar el moviment no s'apliquen directament sino a través de forces aerodinàmiques, fa que el TRMS sigui un sistema difícil de controlar.

Com s'ha dit anteriorment en les maquetes de laboratori com el *Twin Rotor* es treballa amb angles d'atac de pala fixos i amb la velocitat de les hèlix variable. La velocitat dels motors es regula segons la tensió elèctrica aplicada als motors, fet que provoca que els costos de fabricació siguin menors, però per altra banda aquest efecte incorpora una dificultat a l'hora de controlar el sistema ja que els

parells necessaris aplicats per controlar la maqueta no només venen donats pels efectes aerodinàmics sinó també per l'acoblament present entre la dinàmica dels rotors i la del cos del TRMS. Com es pot observar es tracta d'un sistema difícil de controlar que requereix un tipus de controlador robust i més complex que els convencionals. És per aquest motiu que per fer front a aquestes dificultats es parteix d'unes hipòtesis que ajuden a facilitar els càlculs [2] degut a les diferències entre els moments d'inèrcia del sistema elèctric compostat pels grups motors-hèlix i el cos de la maqueta i les escales temporals d'ambdós grups, ja que el grup motor-hèlix actuat presenta una dinàmica molt més ràpida que el moviment del cos de la maqueta. Aquestes hipòtesis permeten desacoblar les dinàmiques d'ambdós grups i permet aplicar per cadascun d'ells un sistema de control en cascada realimentat adequat per ambdós grups.

Per als grups motor-hèlix es fa ús d'un controlador lineal PI que permet assolir les velocitats desitjades dels motors amb la rapidesa desitjada. Per altra banda, el control del sistema mecànic del cos de la maqueta que ve en cascada amb el sistema elèctric, s'ha fet ús d'un tipus de control per sistemes no lineals anomenat Control per Modes Lliscants. Aquest tipus de control altera la dinàmica del sistema aplicant una senyal de control forçant el sistema a assolir i "lliscar" sobre una superfície definida per les seves variables d'estat. En altres paraules, la senyal de control força al sistema a seguir robustament una dinàmica predefinida. Existeixen variants del control per modes lliscants com per exemple utilitzant observadors estimadors [3], control per modes lliscants d'alt ordre (o *High Order Sliding Mode Control*, HOSMC)[4], control integral per modes lliscants [5], entre d'altres. En aquest projecte es fa ús de la base del SMC per dur a terme el posicionament del TRMS juntament amb utilitzant eines que ajuden a estimar algunes les variables necessàries per aplicar el control. L'objectiu principal d'aquest projecte doncs, és

dissenyar i implementar un sistema de control de posició per al TRMS basat en el control per modes lliscants. Per arribar a aquest objectiu primerament s'ha fet ús d'un model matemàtic del TRMS per ser posteriorment implementat en un model de simulació en l'entorn MATLAB-Simulink a través d'una llibreria [6]. A l'últim capítol es valora i s'extreuen les conclusions d'aquest mètode de control en aquest cas específic.

2 Descripció de la planta

El *Twin Rotor MIMO System* (o TRMS) és un equip desenvolupat per Feedback Instruments Ltd amb la funció d'aplicar sistemes de control de posició del sistema. L'informació referent al hardware utilitzat per dur a terme aquest projecte pot trobar-se als manuals de l'equip [7] i [8].



Figura 1: *Twin Rotor MIMO System* [14]

Aquest equip es tracta d'un sistema mecànic que presenta un eix físic fixe i un de mòbil que permet la rotació en dos graus de llibertat gràcies a dues articulacions centrals les quals aporten un grau de llibertat cadascuna. Als extrems de l'eix mòbil es situen unes hèlix perpendiculars entre elles accionades amb un motor DC i amb una protecció adequada. En el centre de l'eix mòbil es situa un contrapès que permet determinar una posició d'equilibri estable i permet equilibrar el moment angular del sistema.

Des del punt de vista del control, ens trobem amb un sistema amb varies entrades i varies sortides (*Multi-Input Multi-Output*) o MIMO de caracter no lineal i amb un gran acoblament. L'estat del sistema es pot describir mitjançant quatre variables: els angles de *pitch* o capcineig i de *yaw* o de guinyada i les velocitats dels rotors.

Per mesurar els angles de capcineig i guinyada s'ha utilitzant encoders incrementals situats en el punt d'unió de l'eix fixe amb el mòbil, mentres que per mesurar la velocitat de gir dels rotors s'ha fet mitjançant tacòmetres que venen incorporats i acoblats als motors.

Els estats del sistema evolucionen de la següent forma: S'introdueixen unes tensions als motors de les hèlix que provoca la rotació dels rotors i alhora de les hèlix produint una força de propulsió que provoca una variació de la posició del sistema, és a dir dels angles de capcineig i de guinyada.

3 Model matemàtic i equacions del moviment del TRMS

La dificultat de plantejar un model matemàtic del sistema i establir el control del TRMS ha atret durant la darrera dècada nombrosos estudis i la creació d'articles degut a la seva alta no linealitat i els acoblaments existents en la dinàmica del sistema. En tots els estudis es parteix de dos perspectives a l'hora d'enfocar el problema: l'enfocament newtonià o l'enfocament d'Euler-Lagrange. Cada tipus d'enfocament abarca el problema des d'una perspectiva diferent convergint la descripció de la dinàmica del TRMS. Segons un estudi [9] l'enfocament newtonià no descriu la dinàmica del sistema de forma prou acurada. El principal inconvenient que presenta és que s'ha de tenir en compte varies forces fictícies amb paràmetres que són difícils d'identificar. Tot i així, el propi fabricant però proporciona un model newtonià simplificat a [10]. En aquest treball s'ha optat per l'enfocament d'Euler-Lagrange per obtenir el model matemàtic que descriu la dinàmica del TRMS. Degut a que el desenvolupament de les equacions del TRMS és notablement extens, en aquest capítol s'exposarà breument el procediment utilitzat i es mostraran les equacions del moviment restants. Per una descripció completa del procediment de càlcul remetis a [11].

3.1 Obtenció del Lagrangià del sistema

La metodologia de la determinació del model matemàtic a partir de la formulació d'Euler-Lagrange consta dels següents passos:

- Definir el conjunt de coordenades generalitzades

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

- Trobar l'energia potencial $U(\mathbf{x}, t)$, l'energia cinètica $T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ i el Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = T - U$ del sistema.
- Trobar el vector de forces generalitzades \mathbf{F}_x
- Obtenció de les equacions del moviment a partir de l'equació d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{F}_x \quad (2)$$

3.1.1 Conjunt de variables generalitzades

El vector de variables generalitzades en el cas del TRMS es defineix a continuació:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_v \\ q_h \\ \theta_m \\ \theta_t \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \\ \omega_m \\ \omega_t \end{bmatrix} \quad (3)$$

sent q_v la posició angular de capcineig, q_h la posició angular de guinyada, θ_m la posició angular de l'hèlix accionada pel motor principal i θ_t la posició angular de l'hèlix accionada pel motor de cua.

A partir del model de Lagrange s'obtenen quatre equacions del moviment, una per cada coordenada generalitzada. Vegis que dues equacions són actuades degut als conjunts motor-hèlix principal i de cua, fent que el sistema es caracteritzi per ser subactuat, és a dir, el nombre d'accions de control és inferior als grau de llibertat del sistema.

3.1.2 Càlcul del Lagrangiana

Per tal d'obtenir el Lagrangiana del sistema s'ha dividit el TRMS en tres cossos per facilitar els càlculs:

- L'eix principal que alhora es troba dividit entre l'articulació central i el motor principal (D) i la part entre l'articulació central i el motor de cua (E) [Fig. 2].
- El motor principal format per les hèlix (C_m) i la part estructural fixe a l'eix principal (B_m) corresponent amb l'estator i la protecció de les hèlix.
- El motor de cua format per les hèlix (C_t) i la part estructural fixada a l'eix principal (B_t) corresponent amb l'estator i la protecció de les hèlix.
- L'eix que subjecta el contrapès (F)
- El contrapès (G)

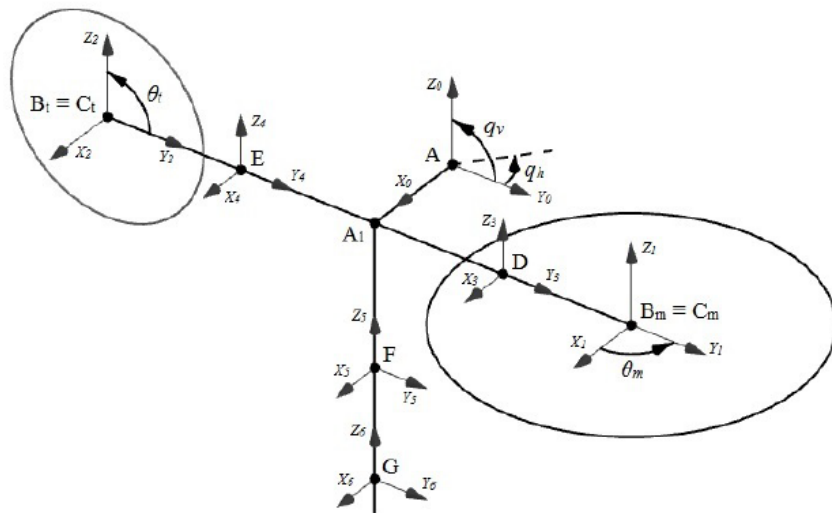


Figura 2: Subdivisions del TRMS i eixos de referència [14]

Com es pot observar a la figura (2) s'ha referenciat cada part del TRMS amb un sistema de referència relatiu que permeti definir la seva posició respecte d'un sistema fix de referència A que es troba en l'articulació que uneix el cos del TRMS amb l'eix de suport vertical. Per al càlcul del Lagrangà del sistema primerament s'han identificat tots els paràmetres físics de les divisions establertes al TRMS: masses, tensors d'inèrcies, i dimensions respecte a les referències relatives. En segon lloc s'han determinat les matrius d'orientació i de posició de les diferents divisions i a partir d'aquestes s'han calculat les velocitats angulars i les velocitats dels centres de gravetat de cada cos. Per últim, s'ha calculat per cada divisió o cos l'energia cinètica T_{c_x} i l'energia potencial U_{c_x} a partir de les següents expressions:

$$T_{c_x} = \frac{1}{2} M_{c_x} |V_{AX}^X|^2 + \frac{1}{2} \Omega_{XA}^{X^T} I_{c_x} \Omega_{AX}^X \quad (4)$$

$$U_{c_x} = M_{c_x} g h_x \quad (5)$$

La velocitat V_{AX}^X s'interpreta com la velocitat de l'origen corresponent al sistema de referència X observada des de la referència global A orientada segons X . Anàlogament succeeix amb la velocitat Ω_{XA}^X . El terme M_{c_x} fa referència a la massa del cos equivalent a la referència X i I_{c_x} és el tensor d'inèrcia d'aquest cos respecte els seus eixos principals. El terme h_x és la distància vertical de l'origen de la referència X respecte el pla horitzontal considerat com a origen de referència de l'energia potencial i g és la gravetat

Un cop obtingudes les expressions de les energies cinètiques i potencials de cadascun dels cossos que comprenen el cos del TRMS s'obté el Lagrangà total definit com la suma dels Lagrangians de cada subcos del TRMS.

3.2 Forces generalitzades

Es consideren les següents forces externes al TRMS:

- Les forces electromecàniques generades pels motors DC acoblats a les hèlix
- Les forces de fricció entre les parts mecàniques del TRMS i l'aire.
- Les forces aerodinàmiques corresponents al moviment de les hèlix.

Segons la teoria que modelitza l'aerodinàmica de l'element de pala present al conjunt rotor-hèlix [12], cada grup genera una força de propulsió T i un parell reactiu Q ambdós proporcionals a la velocitat angular del conjunt. El parell Q es genera degut a la resistència de l'aire oposant-se al moviment de les hèlix, és a dir a la rotació de les pales. Aquest parell es transmet alhora a les articulacions del sistema mecànic. Això causa que el cos del TRMS tendeixi a girar en el sentit oposat de les hèlix. S'observa doncs que aquest fenomen és el principal responsable de l'acoblament present en el sistema.

A la següent figura es representen els parells i les forces aerodinàmiques que actuen sobre el TRMS.

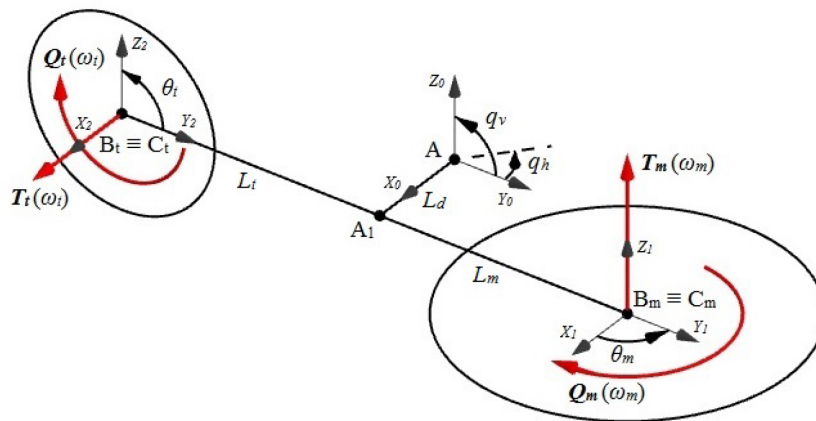


Figura 3: Parells i forces aerodinàmiques que actuen al TRMS [14]

L'efecte d'aquestes forces i parells es pot expressar a segons les equacions (6). Per una descripció més detallada consultar [11].

$$\begin{bmatrix} F_{a,q_h} \\ F_{a,q_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m & 0 \\ -L_d \sin(q_v) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m(\omega_m) \\ Q_m(\omega_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ L_t \cos(q_v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t(\omega_t) \\ Q_t(\omega_t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

A partir de les equacions (6) es pot observar clarament l'efecte d'acoblament entre eixos. El rotor principal genera quatre parells que actuen a la rotació q_v com a la rotació q_h : El parell de propulsió de magnitud $T_m(\omega_m)L_m$ que actua directament en l'angle q_v , el parell de propulsió $-T_m(\omega_m)L_d \sin(q_v)$ que actua en l'angle q_h causant l'acoblament, degut a la distància existent entre A_1 i A generant un parell que s'oposa a la propulsió directa de q_h , el parell de magnitud $-Q_m(\omega_m)\cos(q_v)$ actuant en l'angle q_h i el parell reactiu de magnitud $-Q_m(\omega_m)$ actuant en l'angle θ_m . Anàlogament succeeix amb el rotor de cua provocant els següents parells: el parell de propulsió de magnitud $T_t(\omega_t)L_t \cos(q_v)$ que actua en l'angle q_h , el parell reactiu de magnitud $-Q_t(\omega_t)$ que actua en l'angle θ_t i el parell $-Q_t(\omega_t)$ actuant en l'angle q_v com a acoblament.

Per la banda dels motors DC, els parells electromecànics generats es poden aproximar de forma proporcional amb la corrent i , que hi circula de la forma $k_t i$, on k_t és una constant del motor. Pel que fa amb les forces de fregament en els eixos s'ha utilitzat un model de fricció viscosa que relaciona de manera proporcional aquesta força de fregament amb la velocitat de rotació dels eixos. Així doncs les magnituds de les forces per a cada coordenada generalitzada venen donades pels termes $-B_{x_2}\dot{q}_v, -B_{x_1}\dot{q}_v, -B_{x_3}\omega_m$ i $-B_{x_4}\omega_t$.

Agrupant totes les forces anteriors en cadascuna de les coordenades generalitzades s'obté:

$$F_{q_v} = T_m(\omega_m)L_m - Q_t(\omega_t) - B_{x_1}\dot{q}_v \quad (7)$$

$$F_{q_h} = T_t(\omega_t)L_t\cos(q_v) - T_m(\omega_m)L_d\sin(q_v) - Q_m(\omega_m)\cos(q_v) - B_{x_2}\dot{q}_h \quad (8)$$

$$F_{\theta_m} = k_{tm}i_m - Q_m(\omega_m) - B_{x_3}\omega_m \quad (9)$$

$$F_{\theta_t} = k_{tt}i_t - Q_t(\omega_t) - B_{x_4}\omega_t \quad (10)$$

3.3 Equacions del moviment

Un cop obtingut el Lagrangià del sistema, desenvolupant l'equació (2) per cadascuna de les quatre coordenades generalitzades s'obtenen les equacions que regeixen el moviment del TRMS per cada una d'aquestes. Reagrupant els termes de forma matricial s'obté:

$$\begin{bmatrix} M_q(q) & M_{q,\theta}(q) \\ M_{q,\theta}(q)^T & M_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_q(q, \dot{q}, \omega) \\ c_\theta(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_q(q) \\ 0 \end{bmatrix} = B_x \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(q, \omega) \\ v(i, \omega) \end{bmatrix} \quad (11)$$

De forma genèrica i més compacta :

$$M(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + c(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + g(\mathbf{x}) = B_x\dot{\mathbf{x}} + f \quad (12)$$

On $M(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ és la matriu d'inèrcies del sistema, $c(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^4$ són els termes associats a l'efecte de Coriolis, $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$ els termes associats a les energies potencials, $B_x\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ els termes associats a les forces de fregament viscoses i $f \in \mathbb{R}^4$ les forces aerodinàmiques i electromecàniques externes al sistema [11].

3.4 Model simplificat

Degut a l'abast i objectiu d'aquest projecte, s'ha considerat com a hipòtesi de simplificació que els moments d'inèrcia dels grups motor-hèlix són negligibles enfront dels moments d'inèrcia del cos del TRMS. Es pot comprovar que els termes $M_{q,\theta}(\mathbf{q})$ són petits enfront els termes de $M_q(\mathbf{q})$, de manera que es pot negligir l'acoblament entre ω i $\dot{\mathbf{q}}$. Tenint en compte aquesta consideració, es poden diferenciar dues dinàmiques en el sistema: una dinàmica lenta corresponent als angles de capcineig i de guinyada, és a dir al moviment intrínsec del TRMS, i una dinàmica ràpida corresponent a les coordenades actuades pels motors DC, és a dir els grups motor-hèlix. Considerant un controlador a les velocitats dels rotors que forci $\omega \approx \omega_{des}$ i, suposant que ω_{des} es fa evolucionar suaument, es pot menysprear l'acceleració dels rotors en la dinàmica lenta. Això es deriva a les equacions del moviment del sistema reduït de la forma:

$$M_q(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + c_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + g_q(\mathbf{q}) = \Gamma(\mathbf{q}, \omega) - c_\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega) - B_q(\dot{\mathbf{q}}) \quad (13)$$

on $M_q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ és el tensor d'inèrcia reduït, $c_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^2$ correspon a les forces centrípetes i de Coriolis, $g_q(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$ correspon a les forces conservatives, $B_q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ correspon a les forces de fricció en una matriu diagonal, $c_\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega) \in \mathbb{R}^2$ correspon a l'efecte Coriolis degut al gir de les hèlix i $\Gamma(\mathbf{q}, \omega) \in \mathbb{R}^2$ correspon als parells provocats per les forces externes, considerats com a accions de control en aquest cas.

Com a aclaració, el significat d'aquesta simplificació és suposar que les hèlix no emmagatzemen energia cinètica. Es considera únicament l'efecte produït per les forces externes aplicades sobre els eixos de rotació de cada hèlix, menyspreant l'acoblament entre la dinàmica del cos del TRMS i l'acceleració dels rotors. De manera més detallada es presenten les equacions de moviment del model reduït de

forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_{q,11} & M_{q,12}(q_v) \\ M_{q,12}(q_v) & M_{q,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_v \\ \ddot{q}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{q,1}(q_v)\dot{q}_h^2 \\ c_{q,12}(q_v)\dot{q}_v\dot{q}_h + c_{q,2}(q_v)\dot{q}_v^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{q,1}(q_v) \\ g_{q,2}(q_h) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{q_v}(\omega_m, \omega_t) \\ \Gamma_{q_h}(\omega_m, \omega_t, q_v) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{\omega,1}(q_v)\dot{q}_h\omega_m \\ c_{\omega,2}(q_v)\dot{q}_v\omega_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{q,11} & 0 \\ 0 & B_{q,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \end{bmatrix} \quad (14)$$

pel que fa als parells aerodinàmics es presenten de forma matricial diferenciant-los pels que son provocats pel motor principal i pel de cua:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{q_v}(\omega_m, \omega_t) \\ \Gamma_{q_h}(\omega_m, \omega_t, q_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m & 0 \\ -L_d \sin(q_v) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m(\omega_m) \\ Q_m(\omega_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ L_t \cos(q_v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t(\omega_t) \\ Q_t(\omega_t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

En la taula (1) es mostren els valors dels termes associats a les equacions del moviment reduït:

Terme	Valor	unitats
$M_{q,11}$	0.0349	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$M_{q,12}(q_v)$	$-2.8218 \cdot 10^{-4} \sin(q_v) + 5.05 \cdot 10^{-4} \cos(q_v)$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$M_{q,22}(q_v)$	$0.0233 \cos^2(q_v) + 0.0089$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$c_{q,1}(q_v)$	$0.0233 \cos(q_v) \sin(q_v)$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$c_{q,2}(q_v)$	$-2.8218 \cdot 10^{-4} \cos(q_v) - 5.05 \cdot 10^{-4} \sin(q_v)$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$g_{q,1}$	$0.1982 \sin(q_v) + 0.1547 \cos(q_v)$	$\text{N}\cdot\text{m}$
$g_{q,2}(q_h)$	$K_a(q_h - q_{h,0})$	$\text{N}\cdot\text{m}$
$c_{\omega,1}(q_v)$	$2.65 \cdot 10^{-5} \sin(q_v)$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$c_{\omega,2}(q_v)$	$1.6543 \cdot 10^{-5} \sin(q_v)$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$

Taula 1: Valors dels paràmetres de les equacions del moviment del model reduït

3.5 Paràmetres físics del TRMS

En la taula (2) es mostren els paràmetres dels cosos del TRMS tals com masses, longituds i inèrcies.

Símbol	Paràmetre	Valor	Unitat
L_m	Longitud barra principal (motor principal)	0.24	m
L_t	Longitud barra principal (motor cua)	0.25	m
L_b	Longitud barra contrapès	0.26	m
L_d	Distància barra principal a l'articulació fixa	0.025	m
L_{cb}	Distància entre el contrapès i l'articulació mòbil	0.255	m
r_{cb}	Radi del contrapès	0.01	m
r_{ms}	Radi de l'escut del rotor principal	0.155	m
r_{ts}	Radi de l'escut del rotor de cua	0.10	m
h_{cb}	Altura del contrapès	0.03	m
h	Altura dels escuts dels dos rotors	0.05	m
M_{mr}	Massa del motor i rotor principal	0.228	kg
M_{ms}	Massa de l'escut del rotor principal	0.225	kg
M_{tr}	Massa del motor i rotor de cua	0.206	kg
M_{ts}	Massa de l'escut del rotor de cua	0.165	kg
M_m	Massa barra principal (motor principal)	0.0145	kg
M_t	Massa barra principal (motor de cua)	0.0155	kg
M_b	Massa de la barra del contrapès	0.022	kg
M_{cb}	Massa del contrapès	0.068	kg
M_{mh}	Massa de les hèlix del rotor principal	0.0022	kg
M_{th}	Massa de les hèlix del rotor de cua	0.0033	kg
J_{mr}	Inèrcia del rotor principal	2.65×10^{-5}	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
J_{tr}	Inèrcia del rotor de cua	1.6543×10^{-5}	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
g	Acceleració de la gravetat	9.81	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Taula 2: Paràmetres del TRMS

4 Modelat i control dels conjunts motor-hèlix

4.1 Càlcul de les característiques estàtiques dels rotors

En aquest apartat s'ha procedit a fer un estudi per determinar les característiques estàtiques que relacionen els senyals de control (tensions d'entrada) amb la velocitat de gir de les hèlix. L'experiment s'ha basat en aplicar un tren de graons amb diferents valors de la tensió d'entrada, dins del rang d'operació dels motors, durant el temps necessari per tal de que el conjunt rotor-hèlix assolís l'estat estacionari. A partir dels diferents valors de velocitat en l'estat estacionari per tot el rang de tensions, s'ha ajustat un polinomi que relaciona ambdues variables. Els experiments s'han realitzat de tal forma que s'han bloquejat els dos graus de llibertat per motius de seguretat i per assegurar que el moviment del TRMS no influeix en la velocitat de gir de les hèlix. A continuació es mostren els resultats de la corba de guany d'ambdós motors en tot el seu rang d'operació i la corba interpolada que relaciona el guany amb la tensió. Vegis que la tensió d'entrada a la corba del motor principal ha estat retallada ja que a més tensió aplicada que en els punts extrems de la corba, el motor perdia velocitat, així doncs en aquest rang de tensions queda totalment caracteritzat el motor principal. També es pot observar que la corba del motor de cua presenta més linealitat que el principal.

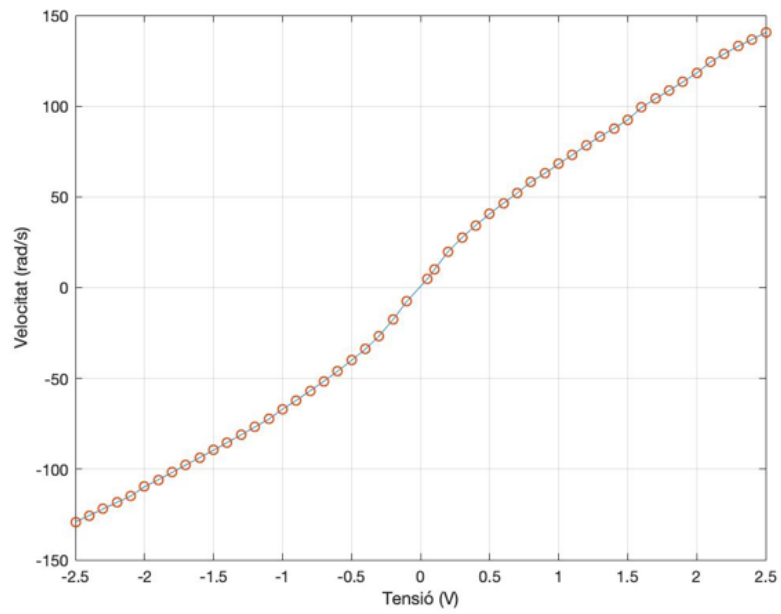


Figura 4: Corba Velocitat-Tensió motor de cua

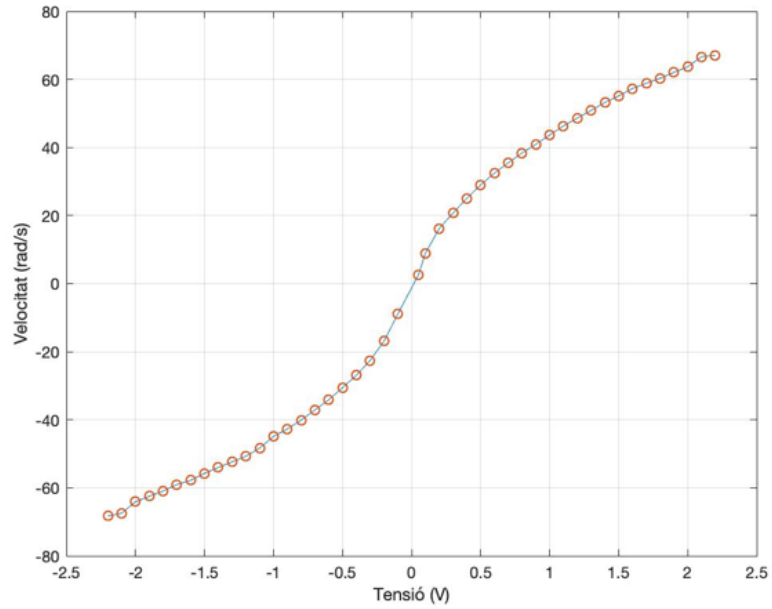


Figura 5: Corba Velocitat-Tensió motor principal

4.2 Modelat dels conjunts motor-hèlix

Per tal de modelar els motors, s'ha considerat la aproximació a un sistema de primer ordre més unes característiques estàtiques que relacionen els senyals de control amb les velocitats en règim permanent. Així doncs, per ambdós motors es disposa del següent model de funció de transferència en el domini de Laplace:

$$G_i(s) = \frac{k_i}{1 + \tau_i s} W_{rp,i}(U_i(s)) \quad (16)$$

On k_i és el guany i τ_i la constant de temps del sistema, on i fa referència al motor principal i al de cua. El bloc que multiplica al sistema de primer ordre són les característiques estàtiques dels motors, ja que el guany estàtic de la funció de transferència del conjunt no és lineal en funció de la tensió d'entrada. Aquest bloc fa que el guany del sistema permaneixi constant, assimilant-se a un sistema lineal de primer ordre:

$$G'_i(s) = \frac{K_i}{1 + \tau_i s} W_{rp,i}(W_{rp,i}^{-1}(\Omega_i(s))) \approx \frac{K_i}{1 + \tau_i s} \quad (17)$$

A les següents figures es mostren uns gràfics que corresponen a la resposta del motor principal i del motor de cua un cop linealitzats davant d'un senyal de control basat en un tren de graons desde 10 rad/s fins a 50 rad/s.

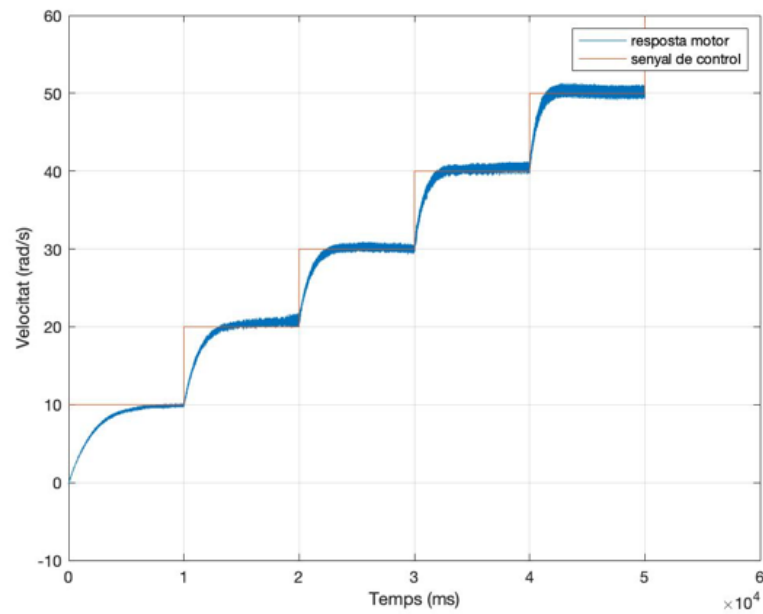


Figura 6: Resposta del motor principal amb el bloc linealitzador

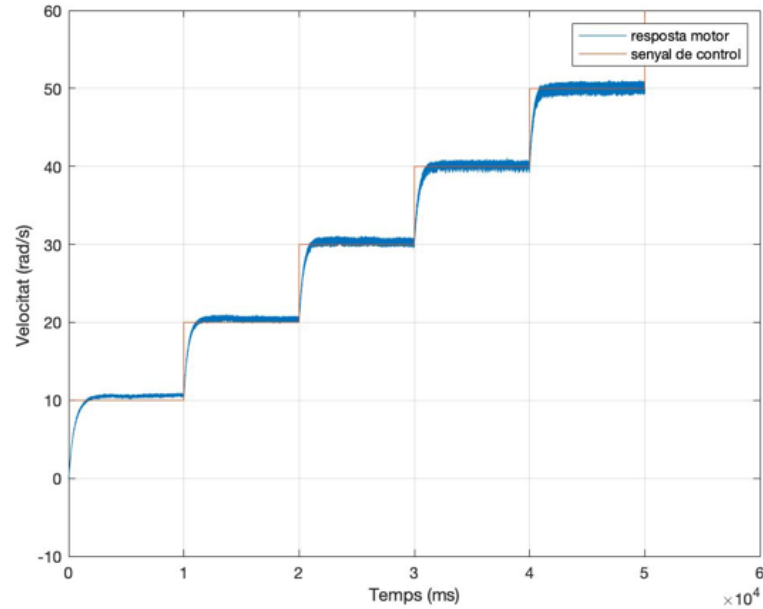


Figura 7: Resposta del motor de cua amb el bloc linealitzador

Una vegada linealitzats els sistemes, s'ha procedit a identificar els paràmetres de cadascun dels motors mitjançant la *System Identification Toolbox* de MATLAB. S'ha aproximat la funció de transferència dels motors a una de primer ordre, obtenint-se els següents resultats a la taula (3).

	$K(\text{adim})$	τ (s)
Rotor principal	1.01934	1.1106
Rotor de cua	0.9904	0.3698

Taula 3: Taula de valors dels paràmetres τ i K

En les següents figures (8) i (9) es pot observar l'aproximació feta a través de la *toolbox* solapada amb la resposta experimental.

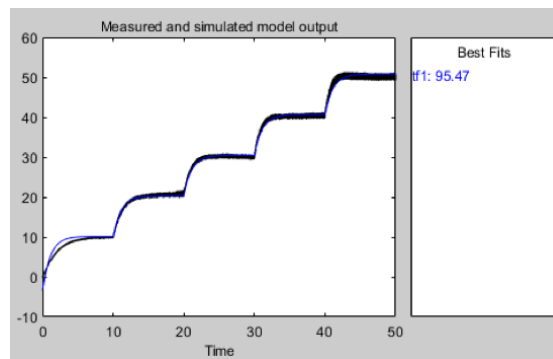


Figura 8: resposta motor principal simulada i real

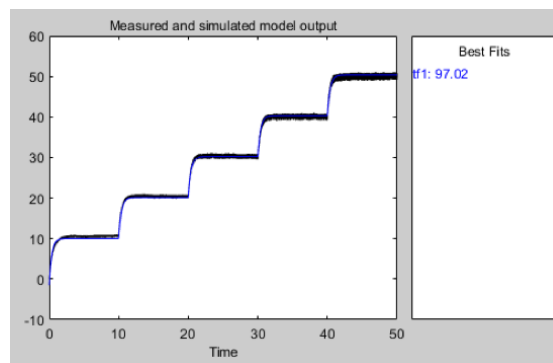


Figura 9: resposta motor de cua simulada i real

Es pot observar que es tracta d'una aproximació prou bona, un ajust del 95,47 % per al motor principal i del 97,02% per al motor de cua.

4.3 Control dels conjunts rotor-hèlix i filtratge del soroll

Els motors han de seguir una consigna que ve imposada pel sistema de control de posició del TRMS. Això fa necessari, en primer lloc, el disseny i l'implementació d'un sistema de control encarregat de ajustar la resposta dels motors al senyal de consigna d'una manera ràpida i eficaç. Com que l'objectiu d'aquest projecte és controlar el TRMS per computador, s'ha utilitzat tècniques de control en temps discret amb un període de mostratge de 1 ms. Les funcions de transferència dels conjunts rotor-hèlix en temps discret, precedides d'un mantenidor d'ordre zero, es poden expressar com:

$$G'_i(z) = \frac{K_i(1 - e^{-\phi_i T_s})}{z - e^{-\phi_i T_s}} = \frac{K'_i}{z + b_{0,i}} \quad (18)$$

on les variables prenen els següents valors:

	$K'_i(adim)$	$b_{0,i}(s)$
Rotor principal	0.0009174	0.0009174
Rotor de cua	0.002673	0.9973

Taula 4: Taula de valors dels paràmetres de les funcions de transferència discretes

Com es pot observar, tant la funció de transferència en temps continu i en discret són estables en el seu domini, ja que presenten pols reals negatius i positius inferiors a la unitat respectivament.

Un cop identificat els models en temps discret que descriuen el comportament dels motors, s'ha procedit a dissenyar uns controladors PI per tal d'assegurar un error estacionari nul davant entrades graó. Un controlador PI es basa en una funció de transferència regida per una part proporcional (P), és a dir una constant proporcional, i una part integral (I) basada en un integrador discret. Un cop introduït el PI al llaç tancat dels motors, aquests sistemes es comporten com a sistemes de segon ordre:

$$W_i(z) = \frac{PI_i(z)G'_i(z)}{1 + PI_i(z)G'_i(z)} \quad (19)$$

Els controladors $PI_i(z)$ dissenyats en aquest cas, s'han dissenyat de la següent forma: s'ha implementat per al motor principal de tal forma per imposar la rapidesa del sistema un cop tancat el llaç de control per cumplir amb major mesura les hipòtesis de l'apartat 3.4, utilitzant el zero i la constant de proporcionalitat $K_{p,i}$ del controlador com a paràmetres de disseny (el pol $Z_c = 1$ ve definit per tal d'augmentar d'ordre els sistema), mentre que amb el motor de cua s'ha utilitzat el bloc controlador $PI(z)$ que proporciona Simulink i s'ha escollit els valors de les constants:

$$PI_{main}(z) = \frac{K_{p,main}(z - z_{c,main})}{z - 1} \quad (20)$$

$$PI_{tail}(z) = K_{p,tail} + K_{I,tail} \frac{T_s}{2} \frac{1}{z - 1} \quad (21)$$

Amb els següents criteris a l'hora de dissenyar-los:

- Donat que la resposta del motor de cua es prou ràpida, el controlador dis-

senyat ha estat implementat per aconseguir una resposta lliugerament més ràpida i per assegurar que aquest no presenti sobrepuig i respongui amb un error nul davant entrada esgraó

- Respecte al motor principal, la resposta que presenta aquest és notablement més lenta que el de cua degut a la seva inèrcia rotacional, doncs s'ha considerat oportú disminuir el temps d'establiment d'aquest motor, alhora assegurant un error nul davant entrada esgraó i assegurant que la resposta no presenti sobrepuig. En aquest cas, el controlador és dissenyat de forma que el temps d'establiment en llaç tancat sigui un 10% inferior en llaç obert, donant una $K_{p,main}$ i un $z_{c,main}$ com a paràmetres del controlador.

La mesura mitjançant aparells electrònics de mesura pot veure afectada per interferències tant electroestàtiques com electromagnètiques degut a varis paràmetres com poden ser la naturalesa dels cables que comuniquen, camps magnètics provinents de l'entorn, entre molts altres paràmetres. Al realimentar el llaç de control de forma experimental, s'ha observat que aquest soroll existent s'amplifica, impedit l'estabilització de les hèlix dels motors. És per això que s'ha trobat oportú l'implementació d'uns filtres a la cadena de realimentació per tal de disminuir el soroll. Això ha estat possible gràcies a la *Filter Design Toolbox* de Matlab, que ha servit per dissenyar uns filtres FIR per dur a terme el filtratge del soroll dels encoders. Un filtre FIR (*Finite Impulse Response*) és un tipus de filtre digital la resposta del qual a una entrada impuls té un nombre finit de termes no nuls. L'expressió d'un filtre FIR un cop aplicada la transformada Z és la següent:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k} = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)} \quad (22)$$

On h_i són els coeficients i N l'ordre del filtre. Aquests es caracteritzen perquè són sempre estables ja que presenten els seus pols a l'origen, poden dissenyar-se per tenir una resposta de fase lineal i per la seva facilitat d'implementació. Els filtres FIR dissenyats en aquest cas, són filtres passabaixos d'ordre 3 seguint el mètode de les finestres [13]. S'ha situat la freqüència de tal als 200 Hz, obtenint el següent diagrama de Bode en guany:

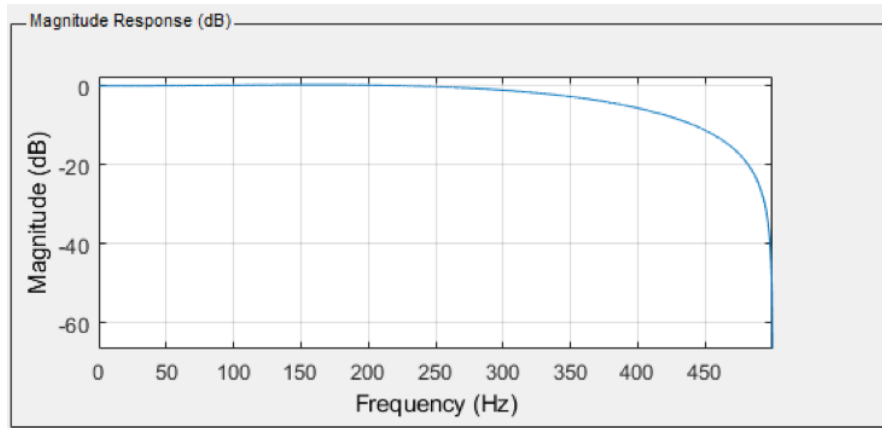


Figura 10: Diagrama de Bode del filtre FIR implementat

Un cop implementat el filtre a la cadena de realimentació d'ambdós motors, s'ha pogut observar que efectivament el soroll a la resposta del sistema en llaç tancat disminueix notablement.

A continuació es mostren unes taules on es mostren els coeficients dels controladors $PI_i(z)$ i del filtre FIR implementats al sistema i seguidament uns gràfics on es representa la resposta dels sistemes de control en llaç tancat un cop introduïts els filtres FIR a la cadena de realimentació i els PI a la cadena directa::

	$K_{p,i}$	$K_{I,i}$	$z_{c,i}$
Rotor principal	1.3267	-	0.9991
Rotor de cua	1.7	1.5	-

Taula 5: Coeficients dels controladors $PI(z)$

	h_0	h_1	h_2	h_3
Coefficients	-0.09497	0.59291	0.59291	-0.09497

Taula 6: Coeficients del filtre FIR

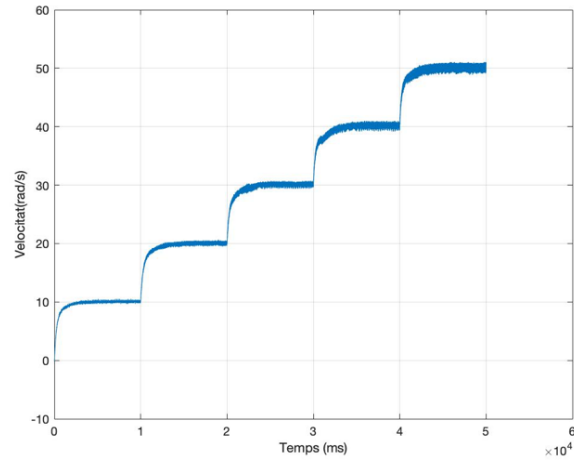


Figura 11: Resposta tailrotor amb el controlador $PI(z)$ i filtre FIR a la cadena de realimentació

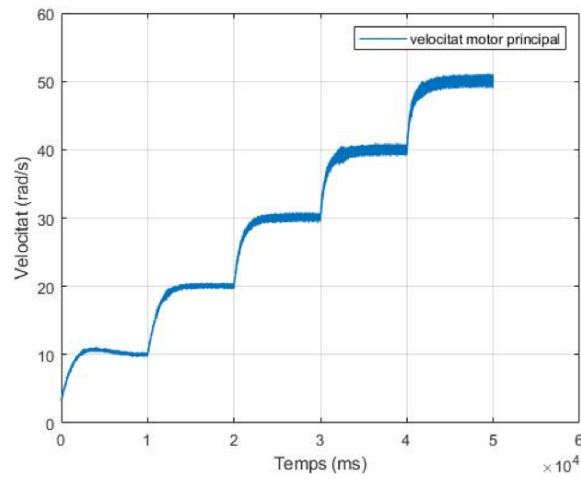


Figura 12: Resposta mainrotor amb el controlador $PI(z)$ i filtre FIR a la cadena de realimentació

Es pot observar a partir de les respostes experimentals que els filtres FIR són efectius ja que el soroll present és semblant a la resposta sense realimentar i per tant no s'amplifica. També s'observa l'eficàcia dels controladors $PI(z)$ que fan complir les especificacions comentades a l'apartat de disseny.

5 Ajust dels paràmetres del model reduït

Un cop determinats els llaços de control de cadascun dels motors, s'ha procedit a identificar els paràmetres del model reduït. Per dur-ho a terme, s'han prè com a referència els valors proporcionats pel manual del TRMS, ja que per fer un estudi per determinar els valors dels paràmetres en aquest cas es requereix d'aparells de mesura que no es disposen i s'ha considerat que els valors proporcionats pel manual representen una bona aproximació per els objectius i l'abast d'aquest projecte. Amb els paràmetres proporcionats es pot observar que queden completament definits els termes de la matriu d'inèrcies, $M_q(\mathbf{q})$, els termes associats a les forces potencials, $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$ i els termes deguts als efectes de Coriolis, $C_q(\mathbf{q})$. Partint d'aquesta base, s'ha fet ús d'una llibreria de Simulink [6] per confeccionar un model de simulació del TRMS i posteriorment s'ha fet experiments per identificar experimentalment termes associats a les forces externes que actuen en el sistema mecànic i influeixen en tals equacions. Aquestes forces externes són les forces resultants provocades per les hèlix i les forces de fricció associades als dispositius mecànics que permeten la rotació en les coordenades q_v i q_h .

5.1 Ajust dels paràmetres associats als parells de fricció

El model de fricció viscosa que s'ha considerat en el model respon a l'expressió:

$$\Gamma_{fric} = \begin{bmatrix} B_{q,11} & 0 \\ 0 & B_{q,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \end{bmatrix} \quad (23)$$

S'observa que els paràmetres a determinar són el terme $B_{q,11}$, associat la rotació q_v i el terme $B_{q,22}$, associat a la rotació q_h . Aquest últim, a més d'ajustar el terme de fricció ha permès reajustar el valor de la constant recuperadora del cable i el

de la posició d'equilibri $q_{h,eq}$.

5.1.1 Determinació del coeficient de fricció q_v

Per tal de determinar el coeficient $B_{q,11}$, s'ha realitzat el següent experiment: s'ha bloquejat mecànicament la rotació q_h deixant lliure la rotació q_v . Amb les velocitats dels motors fixades a 0, s'ha colocat la barra principal en una posició inicial de -0.3 rad i s'ha deixat anar lliurement. No s'ha realitzat desde la posició horitzontal ja que la barra oscilava fins a arribar al límit mecànic provocant un petit xoc, fet que el model matemàtic no contemplaria aquest efecte.

El moviment en el pla vertical, considerant $\ddot{q}_h = \ddot{q}_v = 0$ es regeix per la següent equació:

$$M_{q,11}\ddot{q}_v - B_{q,11}\dot{q}_v + g_{q,1}(q_v) = 0 \quad (24)$$

D'aquesta equació si són conegudes $M_{q,11}$ i $g_{q,1}(q_v)$ es pot determinar $B_{q,11}$ comparant la resposta temporal del sistema real i simulat variant aquest coeficient fins a ajustar l'amplitud de les oscil·lacions fent que coincideixin. El coeficient establert que ajusta millor les oscil·lacions pren el valor $B_{q,11} = 0.002$. En les següents figures es pot observar la comparació dels sistemes real i simulat per al valor del coeficient ajustat i per un coeficient $B_{q,11} = 0.005$

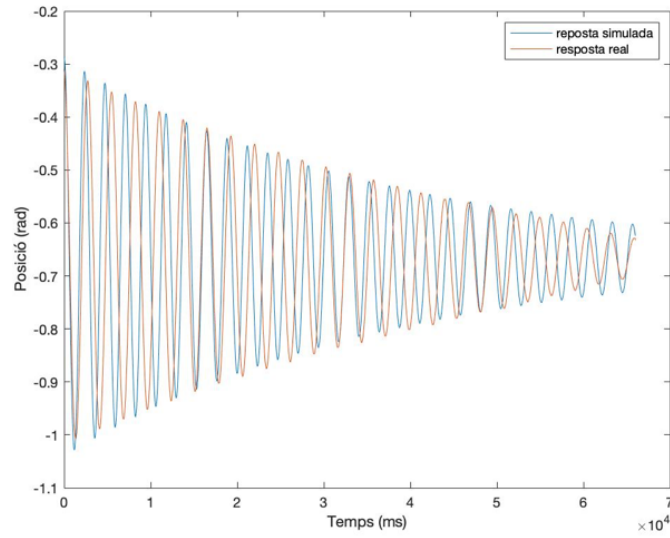


Figura 13: Resposta simulada davant el coeficient $B_{q,11} = 0.002$ i resposta experimental

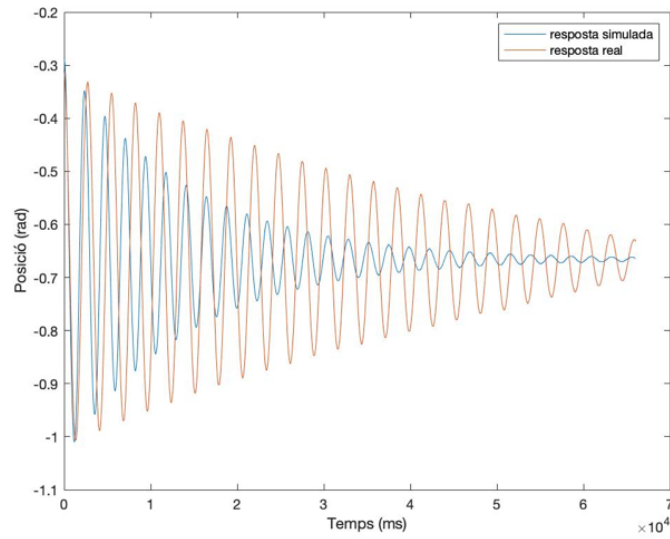


Figura 14: Resposta simulada davant el coeficient $B_{q,11} = 0.005$ i resposta experimental

5.1.2 Determinació del coeficient de fricció q_h

Per determinar el coeficient $B_{q,22}$ s'ha realitzat el mateix experiment anterior amb l'eix horitzontal: s'ha bloquejat mecànicament la rotació q_v en el seu punt d'equilibri i s'ha posicionat l'eix horitzontal en diverses posicions inicials i s'ha deixat anar lliurement.

El moviment en el pla horitzontal, considerant $\ddot{q}_h = \ddot{q}_v = 0$ es regeix per la següent equació:

$$M_{q,22}(qv)\ddot{q}_h - B_{q,22}\dot{q}_h + g_{q,2}(q_v) = 0 \quad (25)$$

on $M_{q,22}$ és coneguda i $g_{q,2}(q_v)$ és el parell exercit pel cable que connecta l'alimentació als motors i els encoders, que s'ha aproximat al parell exercit per una molla de torsió lineal:

$$K_a(q_h - q_{h0}) \quad (26)$$

Tal i com a l'apartat anterior s'ha executat el model de simulació per comparar les respostes i poder ajustar els paràmetres. Els valors d'aquests s'han fixat a $B_{q,22} = 0.007$ i $K_a = 0.013 \frac{Nm}{rad}$

En les següents figures es mostra la comparació dels sistemes real i simulat per diferents posicions inicials q_0 :

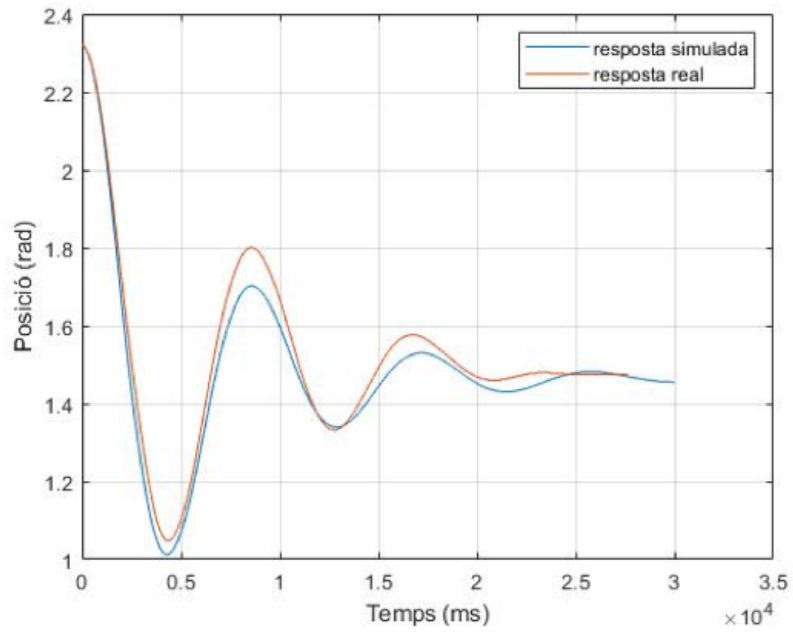


Figura 15: Resposta simulada i real amb posició inicial $q_0 = 2.37rad$

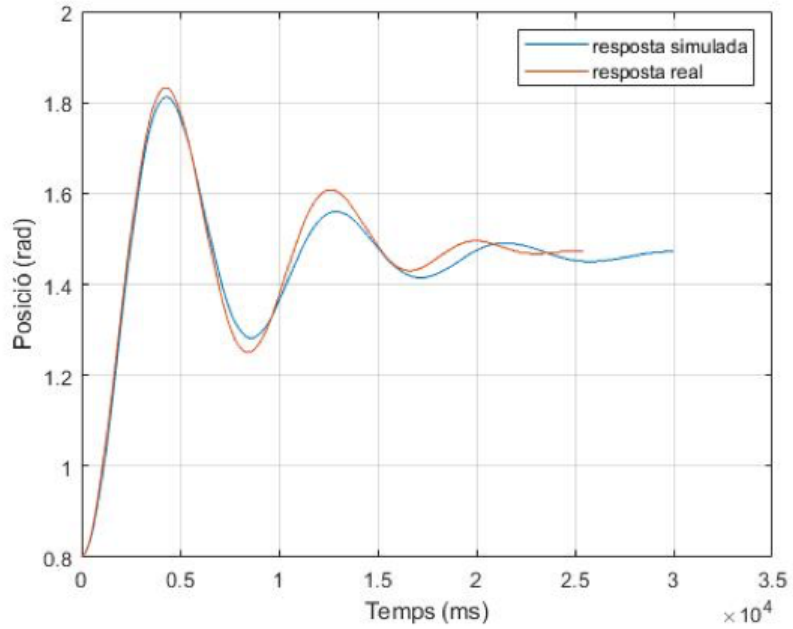


Figura 16: Resposta simulada i real amb posició inicial $q_0 = 0.81rad$

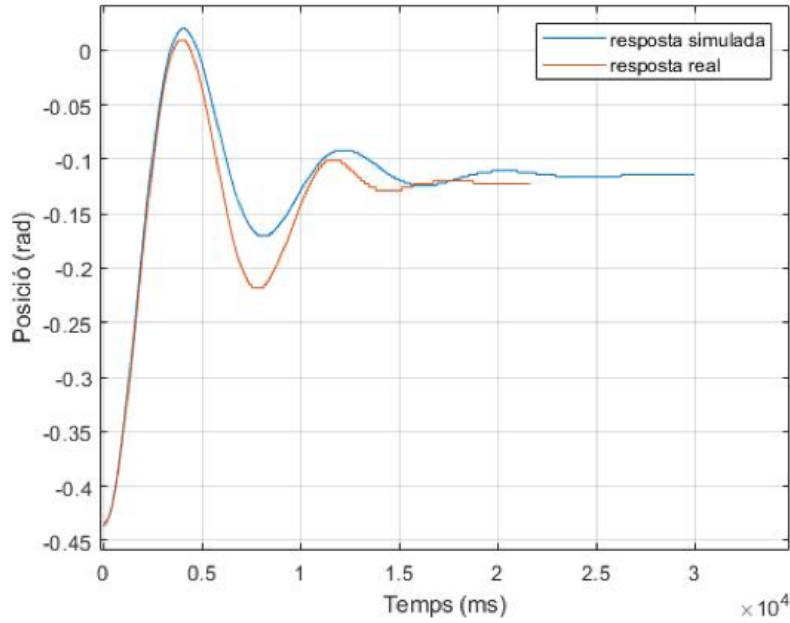


Figura 17: Resposta simulada i real amb posició inicial $q_0 = -0.435rad$

S'observa que el comportament per a diferents posicions inicials, tot i no ser exacte és prou semblant com per cumplir amb els objectius del projecte.

5.2 Característiques estàtiques Velocitat-Força de propulsió dels grups motor-hèlix

Per tal d'acabar amb l'ajust dels paràmetres del model, s'ha procedit a identificar les característiques estàtiques que relacionen les velocitats de gir de les hèlix dels motors amb els parells reactius i les forces de propulsió que aquestes exerceixen. Els parells generats per les forces aerodinàmiques sobre les articulacions del TRMS es regeixen per les equacions deduïdes en l'apartat 3.4 :

$$\Gamma_{qv}(\omega) = T_m(\omega_m)L_m - Q_t(\omega_t) \quad (27)$$

$$\Gamma_{qh}(q, \omega) = T_t(\omega_t)L_t \cos(q_v) - T_m(\omega_m)L_d \sin(q_v) - Q_m(\omega_m) \cos(q_v) \quad (28)$$

On $T_i(\omega_i)$ i $Q_i(\omega_i)$ són les forces de propulsió i els parells reactius respectivament de cada conjunt motor-hèlix. Teòricament, el mòdul d'aquestes dues variables és proporcional al quadrat de la velocitat angular, doncs es pot assumir un model en que els parells reactius de cada hèlix són proporcionals a les forces de propulsió generades:

$$Q_i(\omega_i) = k_i T_i, \quad k_i = cte \quad (29)$$

D'aquesta forma les equacions (27) i (28) es poden reescriure de forma matricial com:

$$\Gamma(q, \omega) = \begin{bmatrix} L_m & K_t \\ -L_d \sin(q_v) - k_m \cos(q_v) & L_t \cos(q_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m(\omega_m) \\ T_t(\omega_t) \end{bmatrix} = D(q)T(\omega) \quad (30)$$

Per tenir una estimació prou acurada dels parells resultants totals aplicats sobre les articulacions del TRMS només cal conèixer la relació entre la força de propulsió generada i la velocitat angular dels rotors. A més, si es coneixen les constants k_t i k_m , el càlcul de les corbes característiques velocitat-força de propulsió resulta directe. En un punt d'equilibri es compleix que :

$$\dot{q}_v = \ddot{q}_v = \dot{q}_h = \ddot{q}_h = 0 \quad (31)$$

I, per tant:

$$\mathbf{g}_q(\mathbf{q}) = \Gamma(\mathbf{q}, \omega) = D(\mathbf{q})T(\omega) \quad (32)$$

de manera que si $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$ és coneguda en qualsevol posició angular \mathbf{q} de la planta, és possible determinar la relació entre les velocitats de gir dels rotors ω i les forces de propulsió $T(\omega)$ resultants, invertint la matriu $D(\mathbf{q})$:

$$T(\omega) = D(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{g}_q(\mathbf{q}) \quad (33)$$

Doncs s'han dut a terme una sèrie d'experiments on es dona una consigna de velocitat a ambdós motors i s'ha enregistrat la posició en l'estat estacionari per obtenir els punts de les corbes. Aquests experiments s'han dut a terme amb uns altres controladors PI que feien la resposta dels motors notablement més lenta per tal d'assolir un transitori suau fins als punts d'equilibri del TRMS.

Com bé s'ha comentat anteriorment, l'aplicació directa d'aquest càlcul és possible suposant conegudes les constants k_t i k_m que relacionen el mòdul de les forces de propulsió amb el parell reactiu generat. Els valors assignats en aquest cas s'han extret d'un estudi independent [9] que modelitza tals magnituds aerodinàmiques. Posteriorment, s'ha validat experimentalment els valors de les constants, que són les següents:

k_m	0.0235 m
k_t	0.02 m

Taula 7: Valors de les constants k_m i k_t

En els gràfics següents es pot observar el polinomi d'ordre 6 que aproxima la corba que uneix els punts experimentals de la forma més precisa. A l'hora d'implementar-ho en simulació però, si ha fet ús d'un bloc de la llibreria de simulink anomenat *Lookup Table 1-D*, que donat unes abssises o *breakpoints* i ordenades interpola linealment per trams els valors experimentals. S'utilitza aquest mètode degut a que la caracterització de les característiques inverses, és a dir força-velocitat, és més pràctic i eficient que ajustar el polinomi invers de la funció.

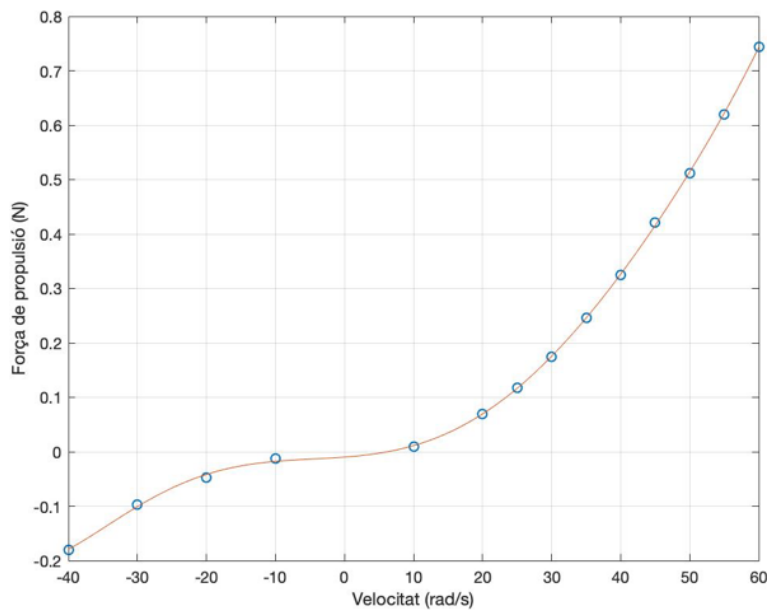


Figura 18: Corba característica Velocitat-Força motor principal

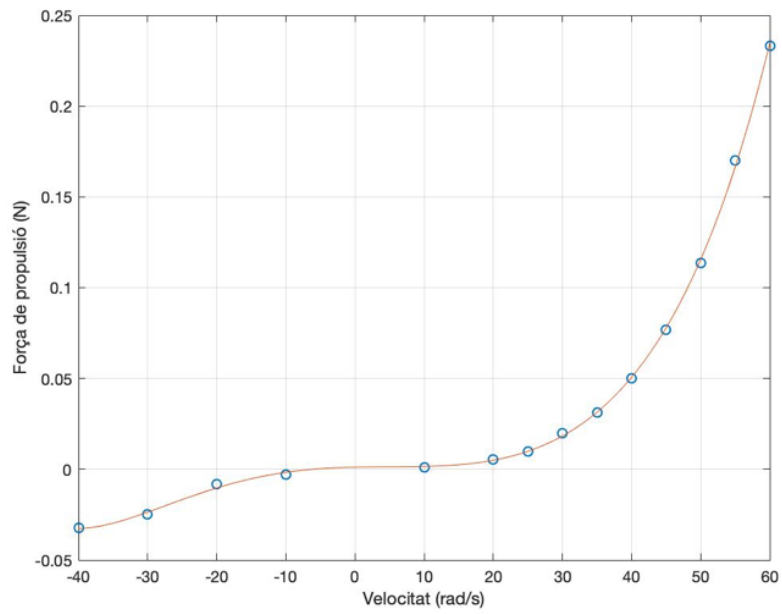


Figura 19: Corba característica Velocitat-Força motor de cua

6 Simulador del TRMS

Un cop ajustats els paràmetres del model reduït, establertes les relacions tensió-velocitat, força-velocitat i les equacions del moviment s'ha fet ús de la llibreria de Simulink [6] per reproduir el comportament de la nostra planta en un model de simulació, introduïnt en aquest les corbes i paràmetres extrets dels apartats anteriors. El simulador s'utilitza mitjançant Simulink, l'entorn de simulació propi de MATLAB. Primerament s'ha implementat el model reduït del TRMS on es descriuen les equacions del moviment presentades en la secció 3.4 mitjançant diagrames de blocs. A partir de l'informació provinent de l'entrada (forces de propulsió i velocitats angulars) i l'estat del sistema (posicions) s'implementa el model donant com a resultat les acceleracions angulars \ddot{q}_h i \ddot{q}_v que, un cop integrades, permeten conèixer la posició i la velocitat angular del sistema.

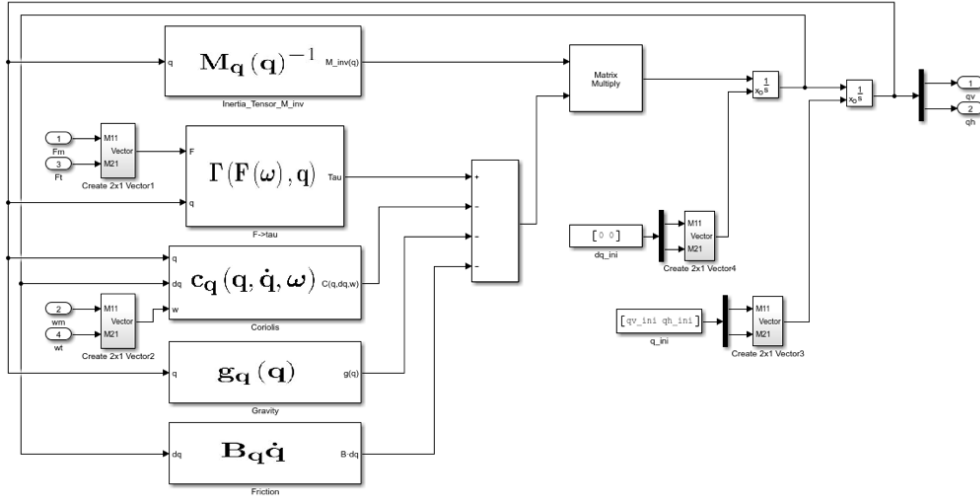


Figura 20: Simulador del TRMS

Els blocs que inclou el simulador del Twin Rotor es mostren a continuació:

- Bloc $\mathbf{F}-\tau$, Proporciona el parell de propulsió que ha d'exercir cada hèlix a partir de les forces de propulsió
- Bloc Coriolis: Calcula el vector resultant a les forces de Coriolis en funció de la posició, la velocitat angular de les hèlix i la velocitat de rotació angular.
- Inertia Tensor inv: proporciona la matriu M_q^{-1} en funció de la posició del TRMS
- Bloc Gravity: Calcula els efectes degut a la gravetat en funció de la posició angular del sistema
- Bloc Friction: Calcula els parells que s'oposen al moviment degut a la fricció en els eixos en funció de la posició angular del sistema

A continuació s'ha empaquetat el bloc del simulador i s'ha agefit a les entrades d'aquest les senyals corresponents a les sortides dels blocs que inclouen la corba que relaciona la força de propulsió amb la velocitat de gir de les hèlix, juntament amb els blocs que inclouen la relació tensió-velocitat dels rotors i la velocitat de les hèlix. Per ajustar-se amb major mesura al model real, s'ha introduït un bloc que introdueix soroll a la lectura de la velocitat de les hèlix de forma similar a la realitat. El model complet es tracta d'un sistema amb dues entrades corresponents a les tensions aplicades als motors, V_t i V_m , i quatre sortides corresponents a la posició angular del sistema, és a dir q_v i q_h , i la velocitat de gir de ambdós hèlix, ω_m i ω_t . La següent figura (21) mostra els continguts de la llibreria esmentada [6].

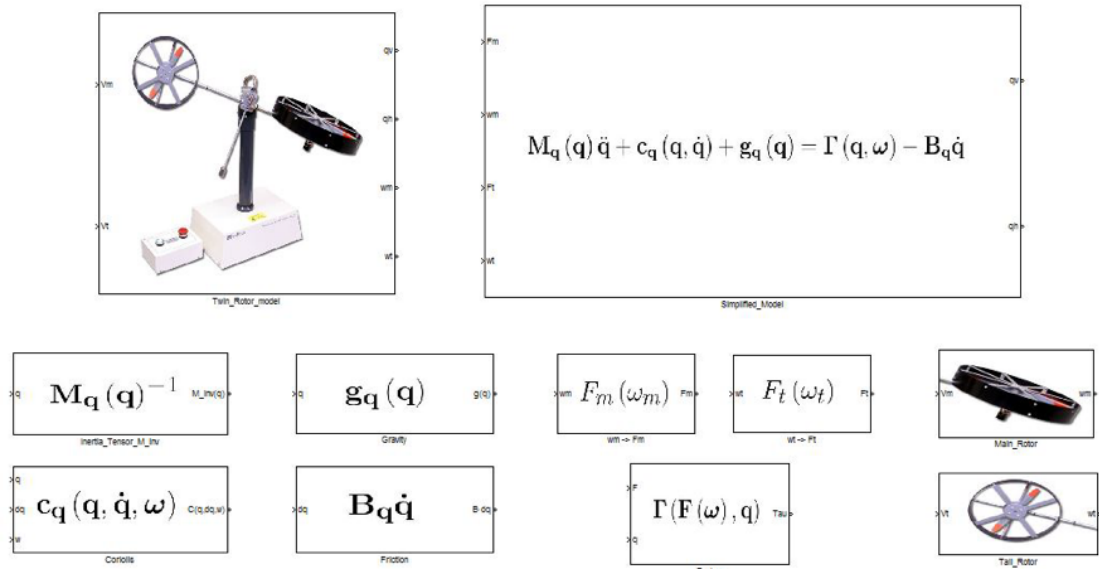


Figura 21: Llibreria del TRMS

Els blocs corresponents a les característiques estàtiques que relacionen la velocitat de gir de les hèlix amb la tensió d'entrada i la força de propulsió han sigut redissenyats utilitzant les corbes obtingudes en els apartats anteriors ja que, tot i ser semblants, són propies de cada planta.

7 Sistema de control del Twin Rotor

Degut a la no linealitat de la planta i al tractar-se d'un sistema amb varies entrades i sortides (*Multi-Input Multi-Output*) i amb certes dinàmiques que presenten incerteses s'ha hagut d'utilitzar tècniques de control centrades en aquest tipus de sistema. En aquest cas s'ha escollit controlar la posició angular del TRMS mitjançant un sistema de control conegut com *Sliding Mode Control* o Control per Modes Lliscants.

7.1 Control per modes lliscants

El control per modes lliscants és una tècnica de control robust que permet portar i mantenir el sistema en un comportament dinàmic sense importar les perturbacions que puguin haver-hi presents i les incerteses dinàmiques i paramètriques que no són fàcils de modelar. És precisament per aquest motiu pel qual s'escolleix la tècnica per governar el TRMS, ja que aquest presenta incerteses dinàmiques i paramètriques per les quals s'han suposat models reduïts i s'ha fet ús d'hipòtesis simplificadores. La idea principal d'aquest tipus de control és portar el sistema a un espai de control anomenat com a superfície lliscant, la qual representa la variació de l'error i la seva derivada en funció d'un paràmetre de disseny on els estats es mantenen dins un rang desitjat acceptable de forma estable. El disseny ve donat per dues etapes: la primera consisteix en dissenyar la superfície lliscant i la segona en dissenyar la llei de control en funció d'aquesta superfície per proporcionar la convergència de la trajectòria del sistema cap a la superfície lliscant en un temps finit. Al venir definida la llei de control en funció de la superfície, aquesta limita els valors de l'acció de control. Aquesta llei de control ve donada per dues parts: la llei de control del mode lliscant i la del mode d'abast. La llei del mode d'abast permet al sistema arribar a la superfície lliscant des de qualsevol punt de l'espai

d'estats, mentres que la llei de mode lliscant és la responsable de mantenir el sistema controlat sobre la superfície lliscant (comportament en llaç tancat).

7.1.1 Superfícies Lliscants

La primera etapa es tracta de dissenyar una superfície lliscant. Primerament es parteix de la naturalesa del sistema a controlar, en aquest projecte es tracta d'un sistema de segon ordre. Un sistema dinàmic de segon ordre es pot representar per la següent equació diferencial [15]:

$$\ddot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \quad (34)$$

On $f(\mathbf{x})$ i $b(\mathbf{x})$ representen dos camps vectorials que formen el sistema dinàmic i \mathbf{x} els estats del sistema. L'objectiu és portar el sistema d'un estat inicial \mathbf{x} a un estat desitjat \mathbf{x}_d . La diferència entre l'estat desitjat i l'estat inicial es defineix com l'error de la següent forma:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t) \quad (35)$$

El que ens interessa doncs és fer tendir aquest error cap a zero en un temps finit considerable. És doncs quan es defineix una funció escalar $S(\mathbf{x})$ en funció de l'error de tal forma que quan la funció s'anul·li ($S(\mathbf{x}) = 0$) dongui lloc a una equació diferencial on alguna solució tendirà a 0 eventualment [16]. La funció més típica que ve formada per una combinació lineal de l'error i les seves derivades és

de la següent forma :

$$S(\mathbf{x}) = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \lambda \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (36)$$

on λ és un paràmetre escalar arbitrari que s'ha de validar experimentalment. Des d'un punt geomètric, l'equació $S(\mathbf{x}) = 0$ defineix una superfície en l'espai d'estats anomenada superfície lliscant, on les trajectòries del sistema controlat són forçades cap a aquesta.

7.1.2 Condició de Lliscament

La condició de lliscament és la condició que fa que el sistema evolucioni, s'apropi a la superfície lliscant i es mantingui en aquesta. La condició es basa en que la distància donada entre $S^2(\mathbf{x}, t)$ i $S(\mathbf{x}, t)$ disminueixi a mesura que els estats del sistema evolucionen [15]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S^2(\mathbf{x}) \leq -K |S(\mathbf{x})| \quad (37)$$

on K en el nostre cas és una constant positiva. Aquesta condició garantitza que la llei de control sigui capaç de seguir les trajectòries per arribar a la superfície en un temps finit. Desenvolupant l'equació (38) s'obté la següent condició equivalent:

$$\dot{S}(x, t) \leq -K \text{sign}(S(x, t)) \quad (38)$$

En la secció 7.2 es profundeix en el comportament d'aquesta condició juntament amb el valor de K

7.1.3 Control equivalent

Mentre el sistema permaneceix en la superfície llicsant, la derivada de la superfície respecte del temps o en altres paraules la rapidesa de canvi ha de ser nul·la [15], és a dir:

$$\frac{d}{dt}S(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (39)$$

Al aplicar aquesta condició podem trobar la senyal de control equivalent que permet al sistema mantenir-se en la superfície. Sabent que:

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d \quad (40)$$

I aplicant la condició

$$\dot{S} = \dot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0 \quad (41)$$

Es substitueix la dinàmica \ddot{x} i aïllant la senyal de control equivalent:

$$u_{eq} = \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - f(x) \quad (42)$$

Si s'aplica la senyal de control equivalent al sistema, es pot observar que el camp vectorial $f(x)$ s'anul·la degut a que la dinàmica és exacte i per tant la dinàmica resultant és la que ve imposada per la superfície lliscant. En el cas del TRMS no és possible aplicar el control equivalent ja que es tracta d'un sistema amb incerteses. En el següent apartat es dedueix la senyal de control per a sistemes amb incertesa.

7.1.4 Senyal de control per sistemes amb incertesa

Pels sistemes amb dinàmiques que contemplen incerteses, com en el cas del TRMS, a l'hora d'aplicar la senyal de control u_{eq} el camp vectorial $f(\mathbf{x})$ no s'anula degut a que no és exacte en el model real. És per això que s'ha d'afegir a la llei de control la condició necessària de lliscament (39) per tal de que el sistema es dirigeixi a la superfície i es mantingui en aquesta. A [15] es planteja la forma d'abastir els sistemes amb incertesa degut a $f(\mathbf{x})$ i $g(\mathbf{x})$ plantejant el guany K de (39) com una funció d'aquests camps vectorials. En aquest projecte però, es planteja K com una constant degut a l'abast i els objectius d'aquest. Tot i així els resultats són efectius i compleixen amb els objectius del projecte.

7.2 Control basat en modes lliscants aplicat al TRMS

En aquest apartat s'aplica la tècnica de control al Twin Rotor per controlar els moviments de capcineig i de guinyada, *pitch* i *yaw* respectivament.

El disseny parteix amb el plantejament de la superfície de lliscament, l'obtenció de la llei de control i l'anàlisi i condicions d'estabilitat pel criteri de Lyapunov. S'ha dut a terme el procediment per a sistemes amb incertesa dinàmica presentat a l'apartat anterior.

7.2.1 Superfície de lliscament

Es planteja la funció $S(\mathbf{x})$ en funció de l'error i la tasa de variació de l'error.

$$S_q = \lambda \tilde{\mathbf{q}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (43)$$

L'error ve donat per la diferència entre l'angle desitjat i l'angle real del sistema:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{des} - \mathbf{q} \quad (44)$$

La funció doncs és de la forma:

$$S_q = \dot{\mathbf{q}}_{des} - \dot{\mathbf{q}} + \lambda(\mathbf{q}_{des} - \mathbf{q}) \quad (45)$$

Per tal de que el sistema es dirigeixi a la superfície lliscant i es mantingui en aquesta s'imposa la condició de lliscament:

$$\dot{S}_q = -K \text{sign}(S_q) \quad (46)$$

El comportament de \dot{S}_q segons la funció *sign* es basa en commutar \dot{S}_q de $-K$ a K de la següent forma:

$$\dot{S}_q = \begin{cases} \dot{S}_q = -K < 0 & \text{si } S_q > 0 \\ \dot{S}_q = K > 0 & \text{si } S_q < 0 \end{cases} \quad (47)$$

Ja que la funció *sign* es comporta de la següent forma:

$$\text{sign}(S_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_q > 0 \\ -1 & \text{si } S_q < 0 \end{cases} \quad (48)$$

Aquest comportament establert es deu a que per arribar a assolir la superfície $S_q = 0$ si ens trobem per sobre d'aquesta, és a dir $S_q > 0$, imposablem $\dot{S}_q < 0$ per tal de que S_q tendeixi cap a $S_q = 0$, mentres que si ens trobem en $S_q < 0$, imposablem $\dot{S}_q > 0$ per redirigir-la cap a $S_q = 0$. D'aquesta forma també s'assegura l'estabilitat que més detalladament s'exposa en la secció d'estabilitat.

Derivant la funció respecte del temps s'obté:

$$\dot{S}_q = \ddot{\mathbf{q}}_{des} - \ddot{\mathbf{q}} + \lambda(\dot{\mathbf{q}}_{des} - \dot{\mathbf{q}}) \quad (49)$$

A partir del model matemàtic del TRMS obtingut a l'apartat 3.4 es pot definir la dinàmica dels angles de capcineig i guinyada com:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M_q(\mathbf{q})^{-1}(\Gamma(\mathbf{q}, \omega) - c_\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega) - B_q \dot{\mathbf{q}} - c_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}_q(\mathbf{q})) \quad (50)$$

Doncs \dot{S}_q queda completament definida. En la l'apartat 7.4 es mostra com s'estima $\dot{\mathbf{q}}$.

7.2.2 Llei de control

A partir de les equacions (38) i (50), s'obté:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{des} - \ddot{\mathbf{q}} + \lambda_q(\dot{\mathbf{q}}_{des} - \dot{\mathbf{q}}) = -K \text{sign}(S_q) \quad (51)$$

Substituïnt la dinàmica del sistema:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{des} - M_q(\mathbf{q})^{-1}(\Gamma(\mathbf{q}, \omega) - c_\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega) - B_q \dot{\mathbf{q}} - c_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}_q(\mathbf{q})) + \lambda_q(\dot{\mathbf{q}}_{des} - \dot{\mathbf{q}}) = -K \text{sign}(S_q) \quad (52)$$

Llavors s'obté la següent llei de control per al parell resultant dels conjunts motor-hèlix:

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega) = M_q(\mathbf{q})(K \text{sign}(S_q) + \lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}) + c_\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \omega) + c_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_q(q) + B_q \dot{\mathbf{q}} \quad (53)$$

Per obtenir la força resultant que han d'exercir les hèlix, es fa ús de la matriu $D(\mathbf{q})$ presentada en l'apartat 5.2 que relaciona el parell de propulsió amb la força que aquest el provoca:

$$\tau = D(\mathbf{q})^{-1} \Gamma_{prop}(\mathbf{q}, \omega) \quad (54)$$

7.2.3 Anàlisis d'estabilitat mitjançant el criteri de Lyapunov

Un cop definida la llei de control és necessari comprovar que el sistema respongui i es comporti de manera estable. És per aquest motiu que s'ha fet ús del criteri de Lyapunov [17] que determina l'estabilitat de sistemes no lineals com en aquest cas. Per tal de que un sistema dinàmic sigui estable, segons el criteri de Lyapunov s'ha de complir :

1. La funció de Lyapunov ha de ser definida positiva
2. La derivada temporal de la funció de Lyapunov ha de ser menor que zero.

És quan es planteja la següent funció de Lyapunov quadràtica per garantir que sigui definida positiva:

$$V(t) = \frac{1}{2} S_q^2 \quad (55)$$

La derivada temporal de la funció de Lyapunov és:

$$\dot{V}(t) = S_q \dot{S}_q \quad (56)$$

Aquesta ha de ser menor a zero per garantir l'estabilitat:

$$S_q \dot{S}_q < 0 \quad (57)$$

A l'hora d'implementar la llei de control, s'ha imposat que:

$$\dot{S}_q = -K \operatorname{sign}(S_q) \quad (58)$$

Doncs la derivada de la funció de Lyapunov ve donada per:

$$S_q(-K \operatorname{sign}(S_q)) < 0 \quad (59)$$

Anà·logament:

$$-K |S_q| < 0 \quad (60)$$

Aquesta expressió és sempre menor que zero, queda demostrat doncs que el sistema és estable al implementar la llei de control.

7.3 Efecte de commutació o efecte *chattering*

El principal inconvenient d'implementar el *SMC* és que un cop el sistema arriba a la superfície de lliscament, aquest va oscil·lant infinitament entorn entorn a aquesta degut a l'efecte de commutació mostrat a l'apartat 7.2. Aquest efecte produeix que en la pràctica no pugui ser implementada aquesta llei de control utilitzant la funció *sign* ja que produeix unes commutacions molt brusques als rotors degut a la discontinuïtat d'aquesta funció i podria arribar a trencar-los.

$$\text{sign}(S_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_q > 0 \\ -1 & \text{si } S_q < 0 \end{cases} \quad (61)$$

L'efecte de commutació, o efecte *chattering*, produeix la següent resposta:

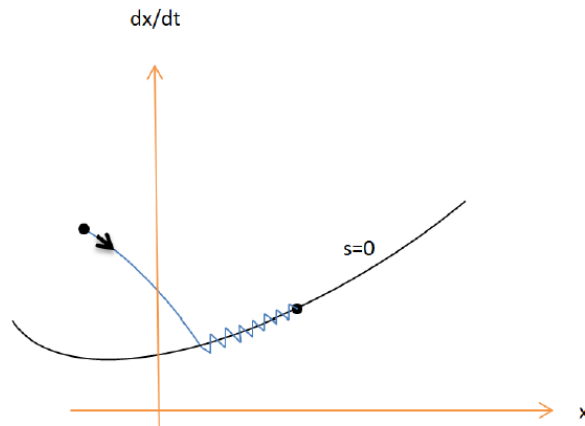


Figura 22: Efecte chattering. Font: Slotline, et al 1991 [15]

La solució per tractar aquest problema és plantejar una funció que es comporti com la funció *sign* però que sigui continua i presenti una transició suau

Una primera alternativa és la funció $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ que es mostra a continuació:

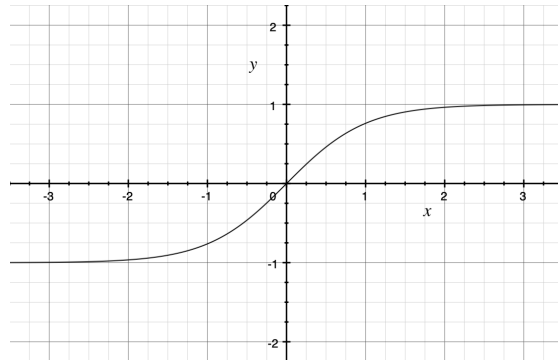


Figura 23: $\tanh(x)$

Aquesta funció hiperbòlica es presenta degut a la similitut a la funció *sign* ja que presenta una transició de -1 a 1 però amb la diferència que aquesta és continua en el seu domini i es pot anar variant la transició a més o menys suau en funció del paràmetre x . Per exemple, la funció $\tanh(10x)$ produeix una transició més ràpida com es pot observar a continuació:

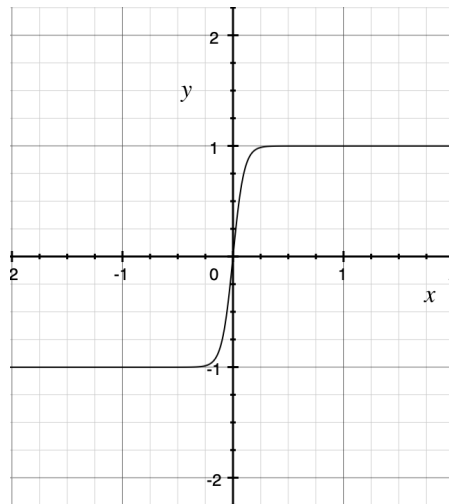


Figura 24: $\tanh(10x)$

Una altra alternativa més rigorosa la qual s'ha utilitzat per substituir la funció *sign* es tracta d'una funció plantejada a [15] anomenada funció de saturació de la següent forma:

$$sat(S(x, t)) = \frac{S(x, t)}{\epsilon + |S(x, t)|} \quad (62)$$

On ϵ és una constant positiva que defineix l'ample de banda de la transició. Com més petit sigui ϵ la funció s'assimila més a la funció *sign*, pel que fa que a l'hora d'implementar el control s'escolleixi de tal forma per tal d'evitar el *chattering* i alhora produeixi una senyal de control suau garantitzant els objectius de control desitjats.

En aquest projecte s'ha utilitzat la funció *sat* com a substituta de la funció *sign* ja que és la que genera la millor resposta tant primerament en simulació com en els experiments.

7.4 Estimació de \dot{q}

A l'hora de mesurar les posicions angulars s'utilitzen encoders incrementals. Aquests, converteixen la posició angular que llegeixen en mostres discretes. Al convertir la mostra en una funció contínua mitjançant un mantenidor d'ordre zero provoca que la funció evolucioni en forma de petits graons. Aquest efecte juntament amb el soroll inherent dels encoders, provoca que al derivar la posició resulti una senyal molt sorollosa i incerta. És per això que s'ha hagut de recórrer a una *toolbox* de Matlab [18] per tal d'obtenir una estimació molt ajustada de \dot{q} . En concret s'ha utilitzat el següent bloc:

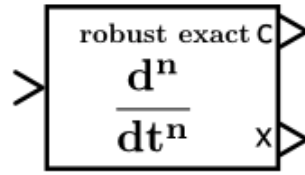


Figura 25: derivador robust [18]

El funcionament es basa en que el bloc genera una senyal que cada cop s'assimila més a la de l'entrada fins que convergeix. Un cop obtenida la senyal ideal fa les n derivades d'aquesta. El bloc te dues sortides: C es un escalar que indica la convergència de la senyal. \mathbf{x} es un vector de dimensió igual a l'ordre del derivador que conté les n derivades. En el cas que ens presenta s'utilitza un derivador de primer ordre ($n = 1$) per estimar $\dot{\mathbf{q}}$. Per a més informació sobre la toolbox dirigir-se a la pàgina web d'aquesta on es presenta la documentació i exemples d'ús.

8 Resultats experimentals i simulació

En aquesta secció es mostren els resultats experimentals i simulats a partir d'aplicar el mètode de control desenvolupat a l'apartat. Primerament s'ha dut a terme diverses proves de simulació abans d'aplicar-ho al sistema real per comprovar que el mètode de control és efectiu i així evitar possibles danys al TRMS per accions de control desmesurades o altres senyals que puguin causar qualsevol tipus de perjudici en aquest. Es pot observar que el model de simulació s'assimila al model real però amb diferents matisos. Això es degut principalment a les simplificacions de les equacions del moviment a termes reduïts juntament amb l'efecte de no contrarrestar a l'exactitud la funció $f(\mathbf{q})$. Es pot observar l'estabilitat de la planta a través de la seva resposta en les diferents senyals: posició, acció de control i superfície lliscant. Com es pot observar, totes les senyals tendeixen cap a un valor finit estable. Es pot comprovar que les superfícies lliscants tendeixen cap a $S_q = 0$, tal i com s'exposa en la teoria dels apartats previs. El senyal de control veiem que experimenta un transitori fins que s'estabilitza a un valor. Això es degut a que el valor al qual tendeix la senyal de control es correspon amb una velocitat de gir de les aspes, i alhora aquesta velocitat estacionària com hem pogut veure a l'apartat 5.2 al restar el sistema en estat estacionari correspon a un parell de propulsió que fa portar el cos del TRMS a la posició desitjada, que presenta un valor constant. En les figures (35), (36) i (37) es mostra la resposta davant la consigna de posició de dos valors finals, on es poden observar dos transitoris i estacionaris clarament diferenciats amb les característiques esmentades. A base de prova i error en el model de simulació, s'han establert els valors $k = 1.25$, $\lambda = 1$ i $\epsilon = 0.7$ per al model del controlador. A continuació es mostren els resultats per a diferents q_{des} tant experimentalment com en simulació juntament amb la senyal de control corresponent amb la velocitat desitjada dels motors i les superfícies lliscants S_{q_i} .

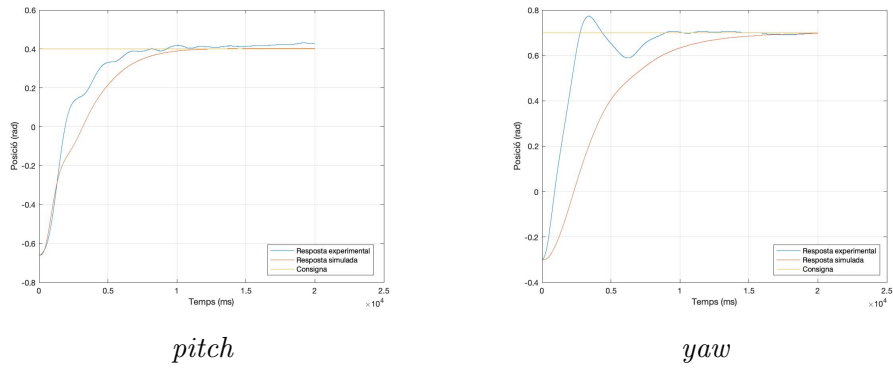


Figura 26: Resposta enfront a entrada $q_{des} = (0.4, 0.7)$ rad

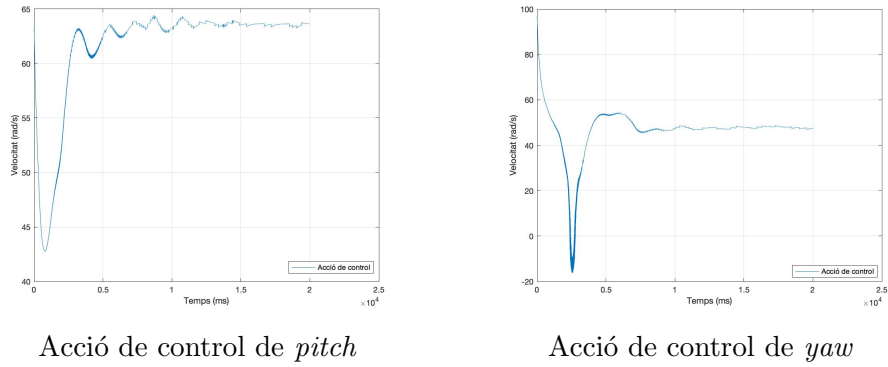


Figura 27: Acció de control dels motors enfront a entrada $q_{des} = (0.4, 0.7)$ rad

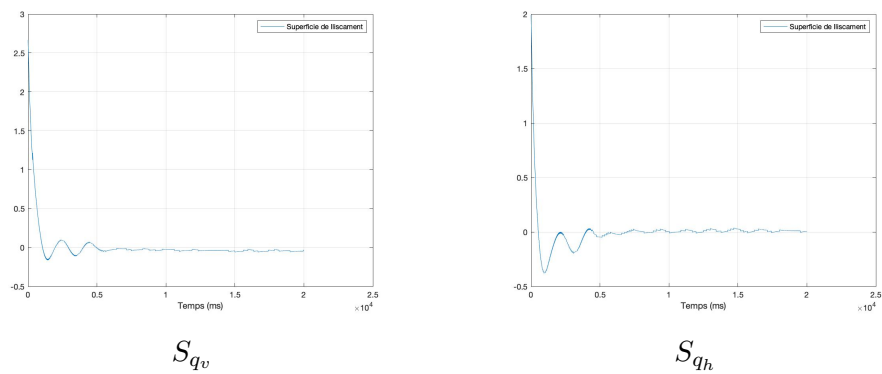


Figura 28: Superfícies lliscants enfront a entrada $q_{des} = (0.4, 0.7)$ rad

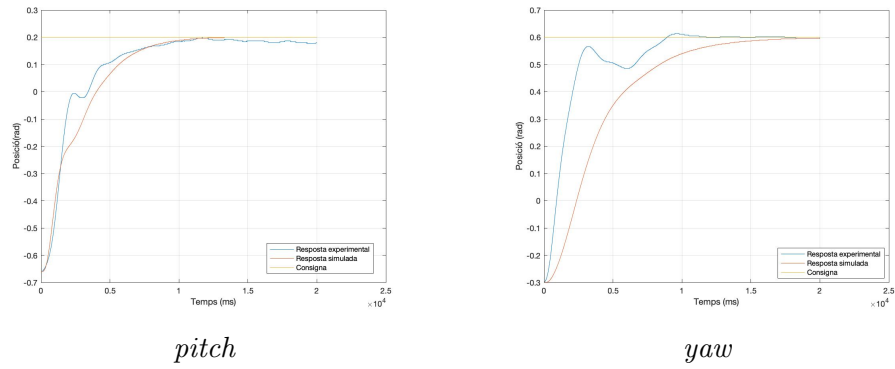


Figura 29: Resposta enfront a entrada $q_{des} = (0.2, 0.6)$ rad

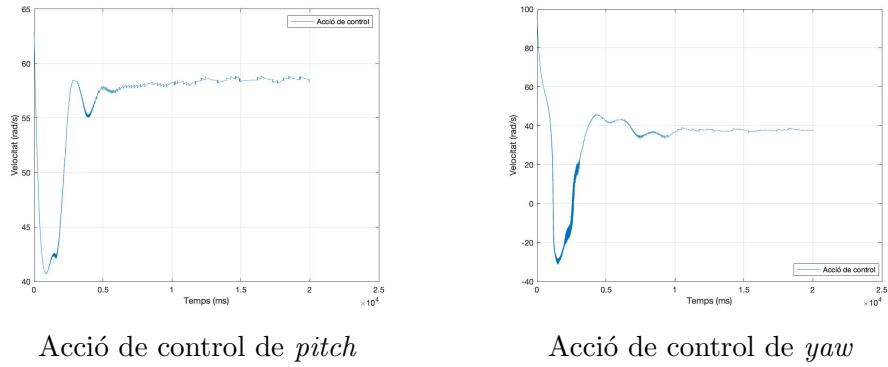


Figura 30: Acció de control dels motors enfront a entrada $q_{des} = (0.2, 0.6)$ rad

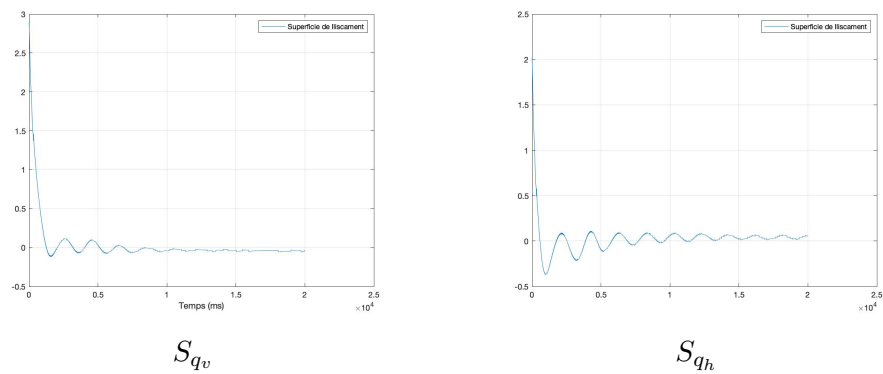


Figura 31: Superfícies lliscants enfront a entrada $q_{des} = (0.2, 0.6)$ rad

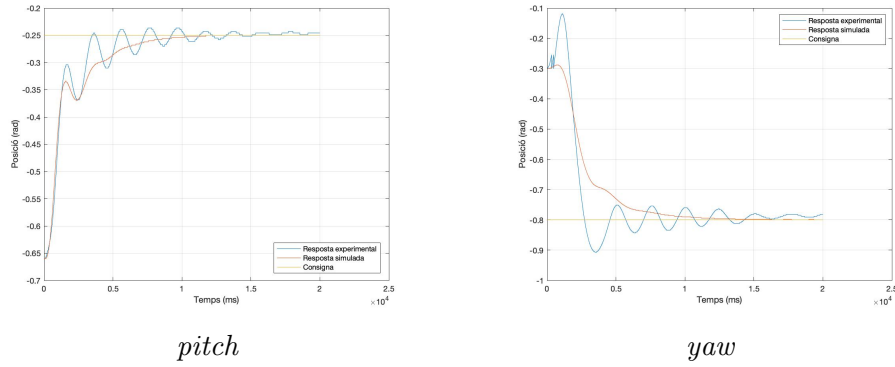


Figura 32: Resposta enfront a entrada $q_{des} = (-0.25, -0.8)$ rad

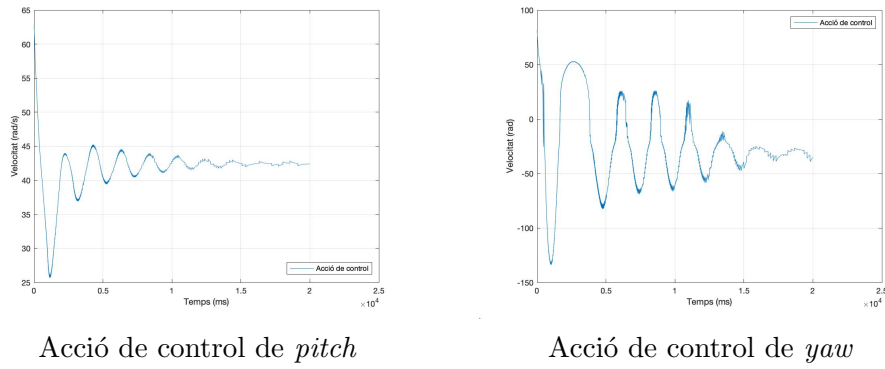


Figura 33: Acció de control dels motors enfront a entrada $q_{des} = (-0.25, -0.8)$ rad

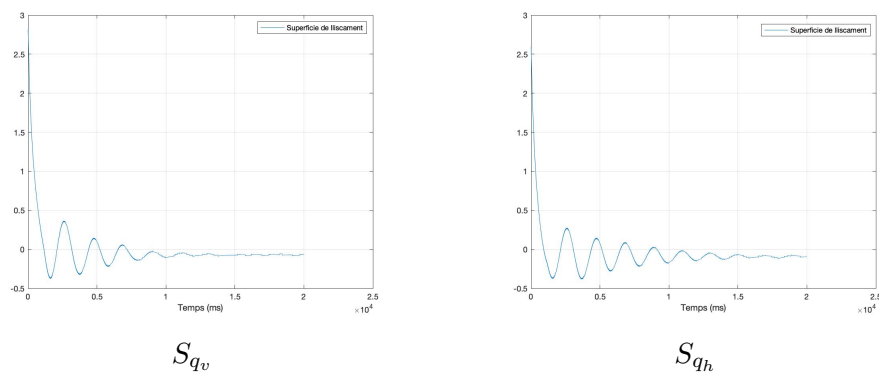
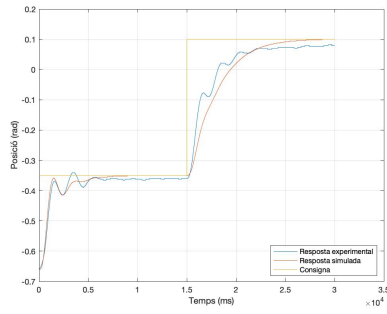
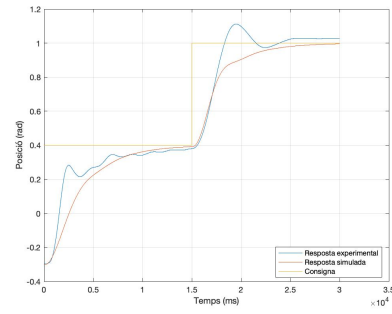


Figura 34: Superfícies lliscants enfront a entrada $q_{des} = (-0.25, -0.8)$ rad

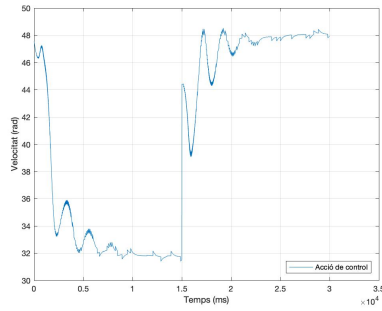


pitch

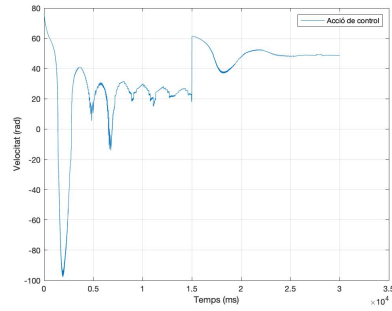


yaw

Figura 35: Resposta enfront a entrada variable $q_{des1} = (-0.35, 0.4)$ rad i $q_{des2} = (0.1, 1)$ rad

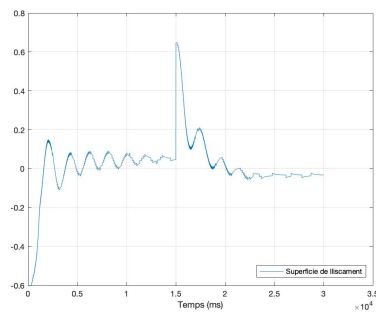


Acció de control de *pitch*

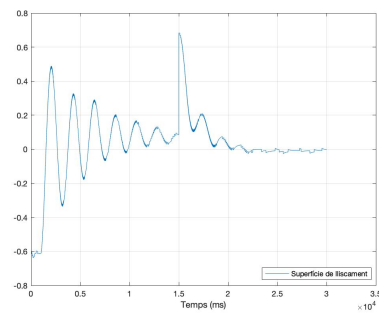


Acció de control de *yaw*

Figura 36: Acció de control dels motors enfront a entrada variable $q_{des1} = (-0.35, 0.4)$ rad i $q_{des2} = (0.1, 1)$ rad



S_{qv}



S_{qh}

Figura 37: Superfícies lliscants enfront a entrada variable $q_{des1} = (-0.35, 0.4)$ rad i $q_{des2} = (0.1, 1)$ rad

9 Pressupost

El pressupost d'aquest projecte es pot dividir en la part corresponent als costos de l'equip de laboratori i el software utilitzat i per altra banda els costos referents al cost del disseny del projecte, energia utilitzada, i el temps dedicat a l'experimentació.

9.1 Cotos de software i equip de laboratori

En aquest projecte s'ha disposat des d'un principi de l'equip de laboratori i del software necessari. Tot i així es mostra una taula referent al cost que suposaria adquirir-los actualment.

Descripció	Cost unitari[€]	Unitats	Preu[€]
Twin Rotor MIMO System	9014.97	1	9014.97
Llicència Matlab/Simulink	6000.00	1	6000.00
TOTAL			15014.97

Taula 8: Pressupost d'adquisició de software i equip

9.2 Costos de desenvolupament del projecte

En aquest subapartat es fa una estimació dels costos que ha suposat el desenvolupament del projecte. S'ha considerat les hores d'investigació i autoaprenentatge de l'enginyer o investigador per dur a terme totes les experimentacions relacionades amb el projecte, tant al laboratori com a casa.

Per altra banda, s'ha considerat el cost associat a l'energia elèctrica consumida pels equips de laboratori tenint en compte que el TRMS consumeix a potència nominal 100W i que s'han dedicat unes 45 hores a l'experimentació amb l'equip. A més, s'ha considerat els costos de manteniment dels equips (en aquest projecte

en concret, s'ha hagut de canviar els encoders) que, segons els responsables del laboratori, suma uns 3000 euros anuals per al conjunt, pel que s'ha considerat la part proporcional a l'equip utilitzat. En la següent taula es veuen reflexats tots els costos de desenvolupament:

Descripció	Cost unitari[€]	Unitats [h]	Preu[€]
Investigació i estudi previs	15.00	20	300.00
Desenvolupament i calibració del model	35.00	30	1050.00
Ajust i calibració del simulador	35.00	20	700.00
Disseny i implementació del control	35.00	100	3500.00
kWh consumits	0.13	5	0.65
Cost manteniment equips	25.00	5	125.00
TOTAL			5675.65

Taula 9: Pressupost d'adquisició de software i equip

10 Impacte ambiental

En aquest projecte no existeix una repercussió directa en termes ambientals i econòmics que pugui ser considerada. Tot i així, les aplicacions que comporta l'ús del SMC en l'indústria comporten com a mínim una millora de l'eficiència en termes energètics i pot comportar una disminució de la contaminació medioambiental. Un exemple es mostra a [20] on es pot observar una planta que utilitza un cicle combinat termodinàmic per generar energia on es pot observar que el control per modes lliscants presenta una major eficiència i eficàcia en front al control lineal convencional. Com a conclusió, al incrementar l'eficiència dels processos de control industrials un consum d'energia menor es requereix en els processos que consumeixin directament l'energia, mentre que en els processos que en produeixen són capaços de generar-ne més amb els mateixos recursos o generar la mateixa amb menys recursos, és a dir augmentant l'eficiència.

Conclusions

En aquest projecte s'ha presentat un estudi de la dinàmica del TRMS, s'ha representat aquesta dinàmica en un model matemàtic que posteriorment ha estat introduït en un entorn de simulació i posteriorment s'ha realitzat el control sobre el TRMS mitjançant la tècnica de control robusta coneguda com control per modes lliscants per a sistemes no lineals. Sobre la fase d'obtenció del model matemàtic que governa la dinàmica del TRMS cal dir que hi ha diversos camins per arribar-hi, on cadascun presenta les seves ventatges i desventatges però a la fi convergeixen en unes equacions diferencials molt semblants. En aquest projecte s'ha utilitzat la formulació d'Euler-Lagrange ja que segons uns estudis realitzats és la que millor aproxima la dinàmica. Tot i així, s'han pres varies consideracions esmentades en els apartats de la descripció del model que afecten al model del sistema, principalment el model de les forces aerodinàmiques exercides pels grups motor-hèlix. La forma de modelar aquestes forces que alhora són les principals causants de l'acoblament entre els graus de llibertat del sistema pot influir en el model obtingut, ja que s'entra en un altre àmbit d'estudi de la mecànica de fluids. En aquest cas s'ha explicat el mètode d'obtenció que ha donat com a resultat unes corbes que relacionen la velocitat de gir de les hèlix amb la força de propulsió exercida. A més de les forces aerodinàmiques, s'han pres varies simplificacions per desacoblar la part mecànica i l'elèctrica, el modelat del parell de torsió exercit pels cables en el pla horitzontal que s'ha considerat lineal, el modelat de les forces viscoses de fricció als eixos de rotació i les corbes que relacionen les tensions amb les velocitats dels motors. Cal remarcar doncs que les equacions i consideracions utilitzades en aquest projecte han estat adaptades per l'equip utilitzat, tot i que podrien ser d'utilitat per altres equips revisant els paràmetres intrínsecs de cada planta. En un treball futur es podria estudiar com afecten els paràmetres i consideracions esmentades així com un estudi profund de les forces aerodinàmiques. Pel que fa a la part

de control s'ha usat un sistema en cascada: uns controladors PI per controlar la velocitat de gir de les hèlix que han permès complir en la gran mesura possible amb les hipòtesis esmentades de les escales temporals i posteriorment el propi sistema de control de posició del TRMS. En aquest projecte s'ha abarcar només el posicionament del TRMS sense el seguiment de trajectòries presentant una idea introductòria al control per modes lliscants. Tot i així, aquest control s'utilitza en major part per al seguiment d'aquestes en robots mòbils, quadricòpters o drons [19], entre d'altres. El posicionament mitjançant aquesta tècnica ha estat efectiu, pel que podem concloure que ha complert amb els objectius proposats inicialment. Per un treball futur es podrien usar millores o altres variants del control per modes lliscants utilitzant per exemple observadors, introduir el mode lliscant integral, fer un estudi per com afecten els paràmetres λ, K, ϵ a la resposta i altres millores o variants d'aquest tipus de control.

Bibliografia

- [1] U.S. DEPARTMENT OF TRANSPORTATION. FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION. *Helicopter flying handbook*. p.3-2 a 3-5. Oklahoma City, 2012
- [2] LÓPEZ-MARTÍNEZ, M., ORTEGA, M.G., VIVAS, C. i RUBIO, F.R. *Control no lineal robusto de una maqueta de helicóptero con rotores de velocidad variable*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 4(3), p. 46-60. 2007
- [3] BHANU PRATAP i SHUBHI PURWAR. *State Observer Based Robust Feedback Linearization Controller for Twin Rotor MIMO System*. 2012 IEEE International Conference on Control Applications (CCA), 2012
- [4] L. FRIDMAN i A. LEVANT. *High Order Sliding Modes*. Chihuahua Institute of Technology, Chihuahua, Mexico. Institute for Industrial Mathematics, Beer-Sheva, Israel.
- [5] YONGPING PAN, CHENGUANG YANG, LIN PAN i HAOYONG YU. *Integral Sliding Mode Control: Performance, Modification, and Improvement*. IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL INFORMATICS.
- [6] RUBEN MASCARÓ i PALLISER. *Llibreria i laboratori virtual del TRMS*. Treball de fi de grau, ETSEIB, UPC, 2015. Disponible a :<https://upcommons.upc.edu/handle/2117/79881> (accés restringit)
- [7] FEEDBACK INSTRUMENTS, *Twin Rotor MIMO System. Advancing teaching manual 1. 33-007-4M5*. Feedback Instruments Ltd., Park Road, Crowborough, East Sussex, TN6 2QR, UK, 1998.

- [8] FEEDBACK INSTRUMENTS, *Twin Rotor MIMO System. Control Experiments. 33- 949S.*, Feedback Instruments Ltd., Park Road, Crowborough, East Sussex, TN6 2QR, UK, 2006.
- [9] TASTEMIROV, A., LECCHINI-VISINTINI, A. I MORALES, R.M. *Complete dynamic model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS) with experimental validation*, a <http://www2.le.ac.uk/departments/engineering/people/academic-staff/andrea-lecchini-visintini/ERF13.pdf>
- [10] RAHIDEH, A., SHAHEED, M.H. I HUIJBERTS, H.J.C. *Dynamic modelling of a TRMS using analytical and empirical approaches* Control Engineering Practice, Vol.16, Març 2008, p.241-259.
- [11] RUBEN MASCARÓ I PALLISER. *Annex A: Modelat i control d'un sistema Twin Rotor*. Treball de fi de grau, ETSEIB, UPC, 2015. Disponible a: <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/80065>
- [12] PARK, S., BACK, N. I RYU, K.W. *A Dynamics Model of Rotor Blades for Real-time Helicopter Simulation* International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering, 7(2), Abril 2012, p. 209-220.
- [13] A. ALZATE, M. *Diseño de filtros FIR de fase lineal mediante ventanas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponible a: <https://comunidad.udistrital.edu.co/malzate/files/2014/05/Filtros-muestreo-modelo.pdf>
- [14] RUBEN MASCARÓ I PALLISER. *Modelat i control d'un sistema Twin Rotor*. Treball de fi de grau, ETSEIB, UPC, 2015. Disponible a: <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/80065>

- [15] VAN CHI,NGUYEN. *Adaptive Sliding Mode Tracking Control For Twin Rotor Multi-input Multi-output Nonlinear System*. International journal of control, automation and systems vol.4 no.4, October, 2015. Disponible a: <https://pdfs.semanticscholar.org/5e85/f9f2caf6aaecb1ad74da0a70c614ce408395.pdf>
- [16] SLOTLINE, J.-J. E.,LI,W. APPLIED NONLINEAR CONTROL (1991), VOLUME 199. Pretience-Hall EnglewoodCliffs, NJ, 1991.
- [17] DIM-UCHILE. 8.4. *CRITERIO DE ESTABILIDAD POR EL METODO DIRECTO DE LIAPUNOV*. Disponible a: <http://www.dim.uchile.cl/fbravo/guias/EDO/liapunov.pdf>
- [18] REICHARTINGER, M., SPURGEON, S., KOCH, S., NIEDERWIESER, H. *A Robust Exact Differentiator Block for MATLAB/Simulink*. Disponible a: <http://www.reichhartinger.at/>
- [19] REINOSO AVECILLAS, M.J. *Diseño de un sistema de control por régimen deslizante para el seguimiento de trayectoria lineal de un quadrorotor*. Treball final de màster, Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca-Ecuador, 2014.
- [20] DIPARTAMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA ED ELETTRONICA, *A quick introduction to sliding mode control and its applications*. Università degli studi di Cagliari